Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 2

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. Г. АРЕНБЕРГ

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ВИБРАТОРА, ОБТЕКАЕМОГО КОЛЬЦЕВЫМ ТОКОМ

(Представлено академиком В. Ф. Миткевичем 27 XI 1939)

1. Рассмотрим электромагнитное излучение идеально проводящего сферического вибратора, возбуждаемого внешним магнитным полем $H_e(\theta)$, направленным по меридианам.*

Вводя в уравнения Максвелла с помощью соотношения

$$rE_\varphi = -jk\frac{\partial U_{(m)}}{\partial\theta} \tag{1}$$

функцию $U_{(m)}(r, \theta)$, определяемую волновым уравнением

$$k^2U_{(m)} + \frac{\partial^2 U_{(m)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U_{(m)}}{\partial\theta}\right) = 0, \tag{2}$$

для компонент магнитного поля получаем выражения

$$H_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial U_{(m)}}{\partial\theta}\right)$$

и

$$H_r = -\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial U_{(m)}}{\partial\theta}\right). \tag{3}$$

Далее, интегрируя уравнение (2) и полагая, что

$$\int\limits_\theta H_e(\theta)\,d\theta = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n\cdot P_n(\cos\theta), \tag{4}$$

получаем, что для случая волн, «бегущих» от вибратора $(r \geqslant a)$:

$$U_{(m)}(r, \theta) = \frac{a}{k}\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n\frac{\xi_n(kr)}{\xi_n'(ka)}P_n(\cos\theta)$$

[здесь

$$\xi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\,H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(x),$$

* См. ДАН, XXIV, № 9 и XXV, № 7 (1939). Основные обозначения этих статей здесь сохраняются.

где $H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(x)$ — функция Ханкеля 1-го рода].

Подставляя полученное значение $U_{(m)}(r,\theta)$ в (1) и (3), получаем:

$$\left.\begin{aligned} E_\varphi &= j\,\frac{a\sin\theta}{r}\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n\frac{\xi_n(kr)}{\xi'_n(ka)}P'_n(\cos\theta)\\ H_\varphi &= -\frac{a\sin\theta}{r}\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n\frac{\xi'_n(kr)}{\xi'_n(ka)}P'_n(\cos\theta)\\ H_r &= \frac{a}{kr^2}\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n\frac{\xi_n(kr)}{\xi'_n(ka)}\,n(n+1)\,P_n(\cos\theta)\end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Эти выражения полностью определяют внешнее электромагнитное поле вибратора. Что же касается вопроса о токах, текущих по поверхности вибратора, то, исходя из соотношения

$$\frac{4\pi i_\varphi(\theta)}{c} = H_e(\theta),$$

связывающего силу тока, текущего через единицу длины меридиана («поверхностная» плотность тока), с магнитным полем, получаем

$$i_\varphi(\theta) = -\frac{c\sin\theta}{4\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n\cdot P_n(\cos\theta), \tag{6}$$

откуда легко определяется общий ток I_φ, текущий через меридиан.

2. Рассмотрим теперь случай «первой сферической гармонической» ($n=1$), когда согласно (4) имеем

$$H_e(\theta) = H_m\sin\theta,$$

где

$$H_m = H_{m_0}e^{-j\omega t} = -A_1.$$

Тогда, выражая функции $\xi_1(x)$ с помощью известного соотношения между функциями Ханкеля и Бесселя

$$H^{(1)}_{3/2}(x) = \frac{j}{\sin\frac{3\pi}{2}}\left[e^{-j\frac{3\pi}{2}}I_{3/2}(x) - I_{-3/2}(x)\right]$$

и вводя в формулы (5) обозначения $M=\frac{1}{kr}$ и $m=\frac{1}{ka}$, получаем:

$$\left.\begin{aligned} H_r &= \frac{2km_s\cos\theta}{cr^2}\sqrt{1+M^2}\,e^{j(kr+\alpha)}\\ H_\theta &= \frac{k^2m_s\sin\theta}{cr}\sqrt{1-M^2+M^4}\,e^{j(kr+\beta)}\\ E_\varphi &= -\frac{k^2m_s\sin\theta}{cr}\sqrt{1+M^2}\,e^{j(kr+\gamma)},\end{aligned}\right.$$

где

$$\frac{m_s}{c} = \frac{aH_m}{k^2\sqrt{1-m^2+m^4}}e^{-j(ka+\psi)},$$

$$\left.\operatorname{tg}\alpha = -kr;\quad \operatorname{tg}\beta = \frac{kr}{k^2r^2-1};\quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{kr}\ \text{и}\ \operatorname{tg}\psi = \frac{ka}{k^2a^2-1}\right\}. \tag{7}$$

Как видим, электромагнитное поле, описываемое выражениями (7), соответствует полю элементарного магнитного диполя с магнитным моментом m_s, определяемым вышеприведенным соотношением *. Далее, воспользовавшись выражением для тока, легко получаемым из формулы (6), находим, что площадь этого эквивалентного магнитного диполя определяется как:

$$Q = \frac{|m_s|}{I_\varphi} = \frac{\lambda}{k\sqrt{1-m^2+m^4}} \,. \tag{8}$$

3. Перейдем теперь к вопросу об излучаемой мощности и сопротивлении излучения**. Найдем сначала среднее значение радиальной составляющей вектора Пойнтинга, для которой согласно (5) имеем:

$$\overline{\overline{S}}_r = -\frac{c}{8\pi} Re\left[E_\varphi(\theta)\cdot\tilde{H}_\theta(\theta)\right] = \frac{ca^2\sin\theta}{8\pi r^2}\;\frac{H_{m_0}^2}{1-m^2+m^4} \,.$$

Интегрируя это выражение по поверхности сферы и переходя от значения H_{m_0} к току I_φ, текущему через меридиан, получаем выражение для полной мощности, излучаемой вибратором, в виде

$$P_\Sigma = \frac{4\pi^2}{3c}\;\frac{I_{\varphi 0}^2}{1-m^2+m^4} = \frac{I_{\varphi 0}^2}{2} R_\Sigma . \tag{9}$$

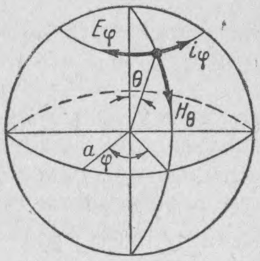
Но согласно (8) мы имеем, что

$$1 - m^2 + m^4 = \frac{\lambda^4}{4\pi^2 Q^2} \,,$$

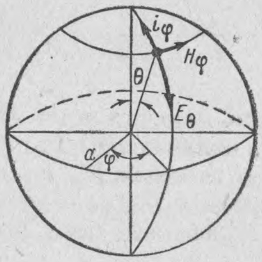
и, следовательно, сопротивление излучения вибратора (отнесенное к току I_φ) определяется как:

$$R_\Sigma = \frac{320\pi^4 Q^2}{\lambda^4} \text{ (ом)}, \tag{10}$$

что соответствует общеизвестной формуле для сопротивления излучения магнитного диполя.



a



b

Покажем теперь, что, как и в случае «электрического» возбуждения вибратора, выражение (10) может быть получено и с помощью приемов, аналогичных методу «наведенных электродвижущих сил» [2, 3].

Действительно, из фигуры (a), иллюстрирующей (при $n = 1$) взаимные направления H_θ, E_φ и i_φ, определяемые формулами (5) и (6), следует, что ток i_φ направлен в сторону, противоположную E_φ. Это положение (см. также фигуру, b, относящуюся к случаю «электрического» возбуждения сферы), соответствующее случаю обычных антенн ***, показывает, что E_φ на поверхности вибратора можно рассматривать как некоторую «эдс излучения», определяемую соотношением $E_{\text{изл}} + E_{\text{ст}} = 0$. Поскольку

* См., например, у Б. А. Введенского [1].
** Расчет потерь в вибраторе приведен в работе М. А. Дивильковского [7].
*** См. у Д. А. Рожанского [4], И. Г. Кляцкина [3], а также у Р. Рюденберга [5] и А. А. Петровского [6].

сторонняя эдс ($E_{ст}$) вызывает в идеально проводящей сфере ток конечной величины, то эту эдс следует рассматривать, как «приложенную» к сопротивлению излучения, распределенному по поверхности вибратора. *

Что же касается равенства тангенциальной электрической компоненты нулю (при $r=a$), то оно может быть пояснено на примере плоской волны, нормально падающей на бесконечно проводящую плоскость. На этой плоскости $E=0$, что естественно истолковать как результат взаимного уничтожения «подающей» и «отраженной» компонент E, сумма которых $E_i+E_r=0$. При этом компонента E_r, действующая на поверхности экрана, может рассматриваться как причина, порождающая отраженную волну. Отвлекаясь от механизма создания этой E_r и постулируя ее, как вызванную внешней причиной, мы приходим к результатам, полученным выше.

Легко видеть, что средняя мощность, «поглощаемая» на единице поверхности вибратора, определяется как

$$-\frac{1}{2}\, Re\,[E_\varphi(\theta)\cdot\tilde{i}_\varphi(\theta)]={}_r\bar{\bar{S}},$$

откуда следует, что вся мощность P, «затрачиваемая» в вибраторе, равна P_Σ.

4. Для сравнения этих результатов с результатами, полученными ранее (см. предыдущие сообщения), формулу (10) следует представить в обычном виде:

$$P_\Sigma=40\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_0^2 \text{ (ватт)},$$

где

$$l=\frac{2\pi Q}{\lambda}=\frac{\lambda}{\sqrt{1-m^2+m^4}} \text{ — длина эквивалентного диполя.}$$

Тогда для момента тока Il, входящего в эту формулу, получаем выражение, отличающееся от случая «электрического» возбуждения вибратора лишь заменой E_m на H_m. Таким образом при равенстве величин E_m и H_m значения P_Σ, соответствующие двум разобранным способам возбуждения колебаний, как этого и следовало ожидать, равны между собой. **

В заключение отметим, что согласно (9) величины P_Σ и R_Σ имеют max при $\lambda_0=4.85a$. Как видим, это «резонансное» значение λ_p не совпадает со значением λ_0, полученным Дж. Дж. Томсоном ([8]) для случая свободных колебаний сферы. Для получения этого значения λ_0 достаточно приравнять (при $n=1$ и $r=a$) нулю выражение (3) для H_θ, откуда получается уравнение $\xi_n'(ka)=0$, определяющее λ_0.

---

* В общем случае для этого сопротивления излучения (отнесенного к единице поверхности вибратора) имеем

$$\rho(\theta)=\frac{E_\varphi(\theta)}{i_\varphi(\theta)}=\frac{4\pi}{jc}\,\frac{\xi_n(ka)}{\xi_n'(ka)}.$$

** Отметим, что произвести сравнения величин P_Σ по выражениям для R_Σ нельзя, так как в «электрическом» случае R_Σ было отнесено к силе тока I_m на экваторе («пучность»), в то время как в данном расчете R_Σ отнесено ко всему току, текущему по сфере.

При работе над данным сообщением я воспользовался советами члена-корреспондента Академии Наук СССР Б. А. Введенского, которому приношу благодарность.

Секция электросвязи
Отделения технических наук
Академия Наук СССР

Поступило
1 XII 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Введенский, Основы теории распространения радиоволн, стр. 177 (1934). [2] L. Brillouin, Radioélectricité, III, Avril (1922). [3] И. Г. Кляцкин, Телеграфия и телефония без проводов, VIII, № 1 (40), стр. 33 (1927). [4] Д. А. Рожанский, Телеграфия и телефония без проводов, № 14, стр. 436 (1922). [5] R. Rudenberg, Annal. d. Physik, p. 446 (1908). [6] А. Петровский, Научные основания беспроволочной телеграфии, стр. 373 (1913). [7] М. А. Дивильковский, ЖТФ, IX, № 5, 433 (1939). [8] J. J. Thomson, Recent Researches in Electricity and Magnetism, § 308, p. 361, Oxford (1893).