Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 2

МАТЕМАТИКА

Ф. И. ХАРШИЛАДЗЕ

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ПРИЗНАКИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КЛАССА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном)

Обозначим через M, C и L^p соответственно классы почти везде ограниченных, непрерывных периодических и суммируемых с p-ой степенью в промежутке $[0, 2\pi]$ функций.

Говорят, что тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos kx+b_k\sin kx\} \tag{1}$$

принадлежит соответственно к классу M, C или L^p, если он является рядом Фурье для некоторой функции, принадлежащей к этому классу.

Известные признаки принадлежности ряда (1) к тому или иному из этих классов содержат чезаровские и абелевские средние этого ряда. В этой заметке мы хотим указать, что метод суммирования тригонометрических рядов акад. С. Н. Бернштейна дает аналогичные признаки. Как известно, метод С. Н. Бернштейна состоит в рассмотрении выражения

$$B_n(x)=\frac{1}{2}\left\{S_n(x)+S_n\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right\}, \tag{2}$$

где

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\{a_k\cos kx+b_k\sin kx\}.$$

Формулируем основные результаты:

Теорема 1. *Необходимым и достаточным условием принадлежности ряда* (1) *к классу* C *является равномерная сходимость последовательности* (2).

Теорема 2. *Необходимым и достаточным условием принадлежности ряда* (1) *к классу* M *является равномерная ограниченность последовательности* (2).

Теорема 3. *Для того чтобы ряд* (1) *был рядом Фурье-Стильтьеса для некоторой функции ограниченной вариации, необходимо и достаточно условие*

$$\int_0^{2\pi}|B_n(x)|\,dx\leqslant V \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Теорема 4. *Необходимым и достаточным условием принадлежности ряда* (1) *к классу* L^p *при* $p > 1$ *является выполнение неравенства*

$$\int_0^{2\pi} |B_n(x)|^p\, dx \leqslant M \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Теорема 5. *Для того чтобы ряд* (1) *был рядом Фурье для некоторой суммируемой функции, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\lim_{n,\, m \to \infty} \int_0^{2\pi} |B_n(x) - B_m(x)|\, dx = 0.$$

Доказательства приведенных теорем вполне аналогичны доказательствам подобных же теорем для средних арифметических Чезаро [1] с той разницей, что вместо свойств средних арифметических Чезаро надо воспользоваться сходными свойствами последовательности (2), опубликованными частично самим С. Н. Бернштейном и частично И. П. Натансоном.

Мы ограничимся перечислением этих свойств:

1°. Если ряд (1) принадлежит к C, то последовательность (2) сходится равномерно [2].

2°. Если ряд (1) принадлежит M, то последовательность (2) равномерно ограничена [2].

3°. Если ряд (1) есть ряд Фурье для суммируемой функции $f(x)$, то последовательность (2) почти везде сходится к $f(x)$ [3].

4°. Если ряд (1) принадлежит L^p, где $p \geqslant 1$, то последовательность (2) сходится в среднем с p-ой степенью [4].

Институт математики и механики
Ленинградского государственного университета

Поступило
26 XI 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, стр. 83—91 (1939). [2] S. Bernstein, C. R. Ac. Sci., 191 (1930). [3] И. П. Натансон, Тр. ЛИИ, № 4, стр. 39 (1937). [4] И. П. Натансон, ДАН, XIX, № 5, стр. 357—360 (1938); см. также И. П. Натансон, Учен. зап. Каз. гос. университета, Алма-Ата, II, стр. 3—16 (1938).