Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 2

МАТЕМАТИКА

Н. ЕФИМОВ

ИЗГИБАНИЕ ОКРЕСТНОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ПОВЕРХНОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 22 XI 1939)

Пусть U обозначает аналитическую поверхность, определенную в декартовых ортогональных координатах уравнением

$$z=\frac{1}{2!}(ax^2+2bxy+cy^2)+\frac{1}{3!}(a_1x^3+\ldots)+\ldots \qquad (\alpha)$$

при условии

$$ac-b^2=0, \qquad |a|+|b|+|c|>0 \qquad (\alpha)$$

(нулевая точка является параболической и порядок прикосновения поверхности с плоскостью $z=0$ равен единице).

Если U имеет в нулевой точке определенный индекс [см. ([1])], то могут быть три типа строения U вблизи этой точки, в соответствии с возможными значениями индекса: -1, 0, $+1$. В заметке ([2]) нами сформулирована теорема, согласно которой в этом случае значение индекса определяется метрикой поверхности U; однако метрика предполагалась подчиненной некоторым ограничениям. Мы укажем сейчас ряд предложений, которые позволяют формулировать эту теорему с исключением из рассмотрения лишь весьма узкого класса метрик, и которыми по существу вопрос выясняется до конца.

Обозначим через $S(u, v)$ двухмерное многообразие с линейным элементом

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,$$

коэффициенты которого $E=E(u, v)$, $F=F(u, v)$, $G=G(u, v)$ мы предполагаем регулярными в окрестности точки $u=0$, $v=0$. Обозначим далее через $K(u, v)$ гауссову кривизну $S(u, v)$ и положим $K(0, 0)=0$, $K(u, v)\not\equiv 0$.

Рассмотрим пучок геодезических, проходящих через точку $u=0$, $v=0$. Условимся для краткости дальнейших формулировок называть геодезическую этого пучка *особой* в случае, если она состоит из особых точек поля кривизны $K=K(u, v)$, т. е. если в каждой ее точке

$$K=0 \quad \text{и} \quad dK=0.$$

Мы также будем называть *особой* или *исключительной* метрику многообразия $S(u, v)$, если в числе геодезических пучка при точке $u=0$, $v=0$ найдутся по крайней мере две особые. Вполне очевидно, что многообразия указанного типа являются редкими; этим оправдывается употребляемое название.

Каким бы ни было многообразие $S(u,v)$, существует бесконечное множество поверхностей, представляемых уравнениями вида (α), изометричных многообразию $S(u,v)$ и на которых нулевая точка соответствует точке $u=0$, $v=0$. Обозначим множество этих поверхностей через $\{U\}$. Как было отмечено в заметке ([2]), в $\{U\}$ существует также бесконечное множество поверхностей, на которых нулевая точка имеет определенный индекс (-1, 0 или $+1$); это множество мы обозначим через $\{\overline{U}\}$, множество остальных поверхностей, т. е. не имеющих определенного индекса нулевой точки,—через $\{\overline{\overline{U}}\}$.

Имеют место следующие предложения:

a) Если γ—неособая геодезическая $S(u,v)$ в пучке при точке $u=0$, $v=0$, то ни одна из поверхностей $\{U\}$ не касается плоскости $z=0$ вдоль γ. (Для геодезических, вдоль которых $K\neq 0$, это утверждение вполне тривиально.)

b) Если γ—особая геодезическая, то всякая поверхность из $\{U\}$, асимптотическое направление которой в нулевой точке совпадает с направлением γ, во всех точках линии γ касается плоскости $z=0$.

Предположим теперь, что через точку $u=0$, $v=0$ проходят параболические линии $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, не являющиеся геодезическими [множество всех параболических линий, проходящих через точку $u=0$, $v=0$, будет конечным ввиду аналитичности метрики $S(u,v)$].

Имеет место предложение

c) Совокупность $\{\overline{\overline{U}}\}$ может содержать лишь конечное множество поверхностей, касающихся плоскости $z=0$ вдоль какой-нибудь из линий $\pi_1, \ldots, \pi_n$.

Для доказательства достаточно повторить рассуждения А. Д. Александрова, с помощью которых доказывается однозначная определенность замкнутых поверхностей типа T ([3]); несколько проще это можно доказать непосредственно, используя уравнение Дарбу ([4]) *.

Рассмотрим вместе с каждой поверхностью из $\{U\}$ ее зеркальное отражение относительно плоскости $z=0$. Пару таких симметричных поверхностей будем обозначать через Π.

Совокупность пар, построенных для поверхностей из $\{\overline{U}\}$ и $\{\overline{\overline{U}}\}$, обозначим соответственно через $\{\overline{\Pi}\}$ и $\{\overline{\overline{\Pi}}\}$.

Регулярным изгибанием пары Π мы называем далее совокупность Π_t пар, уравнения которых регулярны по u, v, t вблизи $u=0$, $v=0$, $t=0$ и $\Pi_{t=0}\equiv\Pi$.

Опираясь на предложения a), b) и c), можно доказать следующую лемму:

Лемма 1. *Для того чтобы при любом выборе двух пар $\overline{\Pi}$ и $\overline{\Pi}'$ из $\{\overline{\Pi}\}$ существовало регулярное изгибание $\overline{\Pi}_t$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$, $\overline{\Pi}_{t=0}\equiv\overline{\Pi}$, $\overline{\Pi}_{t=1}\equiv\overline{\Pi}'$, такое, что все $\overline{\Pi}_t$ принадлежат к $\{\overline{\Pi}\}$, необходимо и достаточно, чтобы метрика $S(u,v)$ не была исключительной.*

Лемма утверждает, таким образом, что в случае неисключительной метрики любую поверхность из совокупности $\{\overline{U}\}$ можно регулярно изгибать в любую другую поверхность из $\{\overline{U}\}$ или в ее зеркальное отражение так, чтобы в течение этого изгибания индекс нулевой точки все время оставался определенным**.

---

* Подробные доказательства всех предложений этой заметки будут опубликованы в Математическом сборнике.

** Вопрос о возможности какого-нибудь изгибания поверхности в ей изометричную исследован E. Levy и H. Schilt'ом ([5]).

Лемма 2. *Если при регулярном изгибании поверхности какая-нибудь ее параболическая точка в каждый момент имеет определенный индекс, то значение индекса при этом изгибании не меняется.*

Доказательство этой леммы усматривается непосредственно. Из лемм 1 и 2 вытекает теорема

Теорема. *Если метрика многообразия $S(u, v)$ не является исключительной, то для всех поверхностей, представляемых уравнением вида* (α) *и изометричных $S(u, v)$, на которых нулевая точка имеет определенный индекс, значение индекса одно и то же.*

Ограничение в этой теореме существенно. Пример: многообразие $S(u, v)$ с особой метрикой, определенной линейным элементом

$$ds^2 = du^2 + (1 + u^5 v^3)\, dv^2,$$

может быть реализовано в виде поверхностей, представляемых уравнением (α), среди которых существуют как выпуклые в точке $u = 0$, $v = 0$ (индекс $= +1$), так и седлообразные (индекс $= -1$). В самом деле, предполагая поверхность определенной уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \\ z &= z(u, v) \end{aligned}\right\}, \qquad (\beta)$$

зафиксируем ее положение относительно координатных осей с помощью условий

$$x(0,0) = y(0,0) = z(0,0) = 0, \quad x_u(0,0) > 0, \quad x_v(0,0) = 0,$$
$$y_u(0,0) = 0, \quad y_v(0,0) > 0, \quad z_u(0,0) = 0, \quad z_v(0,0) = 0.$$

Находя решение уравнения Дарбу ([4]) один раз при начальных условиях

$$z(0, v) = \frac{1}{2} v^2, \quad z_u(0, v) = +v$$

и другой раз при начальных условиях

$$z(0, v) = \frac{1}{2} v^2, \quad z_u(0, v) = -v,$$

получим соответственно

$$z(u, v) = \frac{1}{2}(u + v)^2 - \frac{1}{112} u^5 v^3 + \ldots$$

и

$$z(u, v) = \frac{1}{2}(u - v)^2 - \frac{1}{112} u^5 v^3 + \ldots.$$

Легко видеть, что кривая

$$\frac{1}{2}(u + v)^2 - \frac{1}{112} u^5 v^3 + \ldots = 0$$

имеет в точке $u = 0$, $v = 0$ изолированную особенность, а для кривой

$$\frac{1}{2}(u - v)^2 - \frac{1}{112} u^5 v^3 + \ldots = 0$$

точка $u = 0$, $v = 0$ является точкой самоприкосновения.

Таким образом в первом случае поверхность (β) в нулевой точке выпукла, во втором—седлообразна.

Воронежский государственный университет

Поступило
28 XI 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Ефимов, ДАН, XXIII, № 9 (1939). [2] Н. Ефимов, ДАН, XXV, № 3 (1939). [3] А. Д. Александров, Матем. сборн., 4 (46), 1 (1938). [4] Bianchi, Lezioni... 1, § 136 ( ). [5] H. Schilt, Compositio Mathem., 5 (1937).