Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 2

МАТЕМАТИКА

Ю. Ф. СИРВИНТ

ПРОСТРАНСТВО ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 25 XI 1939)

В этой заметке мы ставим себе целью наметить основные положения общей теории пространства сопряженного и второго сопряженного по отношению к локально-выпуклому пространству.

При построении этой теории нами руководило стремление обобщить известные теоремы Банаха (1) о линейных функционалах.

Итак, всюду в дальнейшем E есть локально-выпуклое пространство.

1. Функционал $\varphi(x)$, определенный на E, называется непрерывным, если прообраз всякого открытого множества значений функционала $\varphi(x)$ есть открытое в E множество. Аддитивный и непрерывный функционал называется линейным.

Рассмотрим пространство E^* линейных функционалов $f(x)$ в E. E^* есть линейное (векторное) пространство.

Введем в E^* топологию, сопряженную по отношению к топологии E. Мы определим эту топологию при помощи приведенного семейства открытых множеств (2), которое будет состоять из множеств вида

$$V = \underset{f}{\in} (\sup |f(x)| < 1, \ x \in G),$$

где G пробегает класс всех ограниченных множеств в E.

Согласно теореме 4 из (2) сопряженная топология выпукла. В дальнейшем множество, открытое в смысле сопряженной топологии, мы будем называть просто открытым, и т. д.

Согласно следствию 1 теоремы 5 из (2) сходимость последовательности линейных функционалов f_n к функционалу f означает равномерную сходимость $f_n(x)$ к $f(x)$ на любом ограниченном множестве точек x.

Согласно следствию 2 теоремы 5 из (2) ограниченность множества $\Gamma \subset E^*$ означает, что множество функционалов Γ отображает всякое ограниченное множество $G \subset E$ на ограниченное множество вещественных чисел.

Теперь, исходя из локально-выпуклого пространства E^*, мы можем определить выпуклую топологию в E^{**}. Но пространство E можно считать частью E^{**}. Таким образом в пространстве E оказывается определенной «вторая сопряженная топология» или, кратко, сс-топология.

В пространстве типа (B) сс-топология совпадает с исходной. В случае общего локально-выпуклого пространства—это не верно, но справедливы

Теорема 1. *Топология E слабее сс-топологии.*

Теорема 2. *Класс ограниченных множеств в E совпадает с классом сс-ограниченных множеств.*

В пространствах E и E^* могут быть введены, далее, слабые топологии. Для определения слабой топологии пространства E нам послужит приведенное семейство, составленное из множеств вида

$$U = \underset{x}{\in} (|f(x)| < 1),$$

где f пробегает все пространство E^*.

Для определения слабой топологии в пространстве E^* возьмем приведенное семейство

$$V = \underset{f}{\in} (|f(x)| < 1),$$

где x пробегает пространство E.

Обе слабые топологии выпуклы. Теорема 5 из (2) показывает, что наша слабая топология в пространстве E совпадает со слабой топологией в смысле Дж. фон-Вехаузена (3). Слабая сходимость точек и слабая ограниченность множеств имеют естественный смысл, даваемый следствиями теоремы 5 из (2).

Применяя теорему 7 из (2), мы можем доказать

Теорему 3. *Если E—2-й категории, то всякое слабо ограниченное множество линейных функционалов ограничено.*

Для метрических пространств эта теорема есть частный случай теоремы Мазура и Орлича (4).

Теорема 4. *Если E—2-й категории, то его топология совпадает с сс-топологией.*

Определение. Последовательность $x_n \in E$ называется сходящейся в себе, если по любой окрестности нуля U в E можно указать индекс N такой, что $m > n \geqslant N$ влечет $x_m - x_n \in U$. Если в пространстве E всякая сходящаяся в себе последовательность сходится к некоторому элементу $x \in E$, то пространство E называется полным (5).

Теорема 5. *Если E—2-й категории, то пространство E^* полно и слабо полно.*

Теорема 6. *Если E—2-й категории, то всякое слабо ограниченное множество его точек ограничено.*

2. Этот параграф параллелен предшествующему, но здесь мы модифицируем определение сопряженного и второго сопряженного пространств, и это позволит нам освободиться от гипотезы, что E—2-й категории, присущей теоремам § 1.

Секвенциально непрерывным называется функционал $\varphi(x)$ такой, что $x_n \to x$ влечет $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$. Функционал аддитивный и секвенциально-непрерывный называется секвенциально-линейным.

Рассмотрим пространство E° секвенциально-линейных функционалов в E. Очевидно, $E^* \subset E^\circ$, и обе топологии пространства E^*, о которых шла речь в § 1, могут быть продолжены на все пространство E°. Обе они будут выпуклыми топологиями пространства E°. Рассматривая E как часть пространства $E^{\circ\circ}$, мы можем теперь, как и в § 1, определить в E сс-топологию и слабую топологию. Но теперь вследствие того, что E^* заменено на E°, обе эти топологии будут более сильными, нежели в § 1.

Теорема 1а. *Сходимость в пространстве E слабее сс-сходимости.*

Теорема 2а. *Класс ограниченных множеств пространства E совпадает с классом сс-ограниченных множеств.*

Эти теоремы доказываются непосредственно.

Теорема 3а. *Если E полно, то всякое слабо ограниченное множество секвенциально-линейных функционалов ограничено.*

Определение. Сходимость в пространстве E называется устойчивой, если для всякой последовательности $x_n \to 0$ существует последовательность положительных чисел $a_n \to \infty$ такая, что множество $a_n x_n$ ограничено.

Это определение устойчивости эквивалентно определению Г. М. Фихтенгольца [6].

Теорема 4а. *Если сходимость в E устойчива, то она эквивалентна сс-сходимости.*

Теорема 5а. *Если сходимость в E устойчива, то E^* полно и слабо полно.*

Теорема 6а. *Если сходимость в E устойчива, то всякое слабо ограниченное множество его точек ограничено.*

Отметим, что последняя теорема может быть полезной при решении вопросов, трактуемых в [7] и [8].

3. В заключение укажем некоторые примеры.

Рассмотрим пространство CF функций непрерывных в $(-\infty < t < +\infty)$ с метрикой

$$\rho(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x|_n}{1 + |x|_n},$$

где

$$|x|_n = \max |x(t)|, \quad -n \leqslant t \leqslant +n.$$

Пространство CF есть локально-выпуклое пространство типа (F). Общая форма линейного функционала в пространстве CF есть [9]

$$f(x) = \int_a^b x(t)\, dg(t),$$

где a, b—произвольные вещественные числа, $g(t)$—ограниченной вариации в (a, b).

Таким образом за пространство CF^* можно принять пространство функций $g(t)$ ограниченной вариации на всей вещественной оси, каждая из которых отлична от нуля лишь в конечном интервале и полунепрерывна слева: $g(t-0) = g(t)$.

Сильная сходимость в пространстве CF^* имеет следующий вид: $f_n \to 0$ означает, что существует интервал (a, b), вне которого исчезают все функции $g_n(t)$, а внутри этого интервала $\operatorname*{var}_{a,b} g_n(t) \to 0$.

Отметим, что пространство CF^*, хотя и сопряженное к метрическому, само не является метрическим. Это пространство локально выпуклое, полное, с устойчивой сходимостью, но 1-й категории.

Рассмотрим теперь любое бесконечное множество $Q = \{q\}$ и пусть E есть пространство функций $x(q)$ с вещественными значениями, определенных на Q. Топологизируем E при помощи приведенного семейства, состоящего из множеств:

$$U = \mathop{\in}_{x} (|x(q)| < 1),$$

где q пробегает множество Q.

Тогда пространство E станет локально-выпуклым пространством 2-й категории. Если множество Q неисчислимо, то сходимость в пространстве E неустойчива. Стало быть, оно не метризуемо.

Общая форма линейного функционала в E есть

$$f(x) = \sum_{q \in Q} x(q) \varphi(q),$$

где $\varphi(q)$—функция с вещественными значениями, определенная на Q и отличная от нуля лишь в конечном числе точек.

$f_n \to 0$ означает в пространстве E^*, что существует такой конечный набор точек q, вне которого исчезают все $\varphi_n(q)$ и, кроме того, $\varphi_n(q) \to 0$ при любом $q \in Q$.

Пространство E^* есть снова пространство с устойчивой сходимостью, но не метризуемое. Оно полное и, однако, 1-й категории.

Институт математики и механики
Ленинградского государственного университета

Поступило
26 XI 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa (1932). [2] Ю. Ф. Сирвинт, ДАН, XXVI, № 2 (1940). [3] J. v. Wehausen, Duke Math. Journ., 4, 166 (1938). [4] S. Mazur u. W. Orlicz, Studia Math., 4, 154 (1933). [5] J. v. Neumann, Trans. Am. Math. Soc., 37, 1 (1935). [6] Г. Фихтенгольц, Мат. сб., 46, 196 (1938). [7] Ibid., p. 206. [8] R. Boas a. J. Tukey, BAMS, 54, 523—528 (1938). [9] J. v. Wehausen, loc. cit., p. 164.