Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 2

МАТЕМАТИКА

Ю. Ф. СИРВИНТ

К ГЕОМЕТРИИ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 23 XI 1939)

1. Пусть E—линейное или векторное абстрактное пространство. Если U, V и т. д.—некоторые множества точек E, то множество, являющееся соединением (суммой) всех этих множеств, будем обозначать через $S(U, V, \ldots)$, а множества, являющиеся пересечением (произведением) их, будем обозначать через $P(U, V, \ldots)$. Далее,

$$U+x_0 = \underset{x}{\in} (x = x' + x_0,\ x' \in U).$$

Операцию построения такого множества будем называть переносом множества U.

Если h—вещественное число, то

$$hU = \underset{x}{\in} (x = hx',\ x' \in U)$$

—операцию построения такого множества, когда $h \neq 0$, будем называть подобным преобразованием множества U.

Определение. Множество U есть окружение точки x_0, если на каждой прямой, проходящей через x_0, множество U содержит интервал, заключающий точку x_0 внутри себя. При этом U окружает точку x_0 открытым образом (соответственно конечным образом), если упомянутый интервал всегда открытый (соответственно конечный).

Выпуклые множества, окружающие точку нуль открытым и конечным образом, существуют в каждом линейном пространстве. Примером является множество точек линейного пространства, абсолютные величины координат которых по базе Хамеля этого пространства меньше единицы.

Пусть U—выпуклое окружение нуля. Положим для $x \in E$

$$|x/U| = \inf a,\ a > 0,\ x \in aU.$$

Функционал $|x/U|$ всегда положителен, конечен, однороден [в том смысле, что

$$|ax/bU| = \frac{a}{b}|x/U|, \text{ если } \frac{a}{b} \geqslant 0]$$

и удовлетворяет аксиоме треугольника:

$$|x+y/U| \leqslant |x/U| + |y/U|$$

[сравни (1)].

Лемма. Пусть U—выпуклое множество, окружающее точку нуль и точку x_0 одновременно. Возьмем любое $x \in E$ и обозначим $h = |x/U - x_0|$.

Тогда $|x + hx_0/U| = h$, а, следовательно,

$$\frac{|x/U|}{1+|-x_0/U|} \leqslant |x/U - x_0| \leqslant \frac{|x/U|}{1-|x_0/U|}.$$

Эта лемма позволяет установить три весьма существенных факта.

Теорема 1. *Пусть U есть выпуклое окружение нуля. Тогда необходимым и достаточным условием того, чтобы x_0 было окружено множеством U, является $|x_0/U| < 1$.*

Теорема 2. *Если выпуклое множество окружает одну из своих точек открытым образом, то оно окружает открытым образом любую точку, ему принадлежащую.*

Теорема 3. *Если выпуклое множество окружает одну из своих точек конечным образом, то всякая точка, окруженная им, окружена конечным образом.*

2. В пространстве E определена некоторая топология, если в нем определено семейство множеств, которые названы «открытыми». Открытое множество называется также «окрестностью» любой точки, принадлежащей ему.

Топология называется выпуклой, если пространство, обогащенное ею, есть локально-выпуклое ([2]).

Определение. Подсемейство $\mathfrak{F}$ семейства всех открытых множеств есть «приведенное семейство открытых множеств», если любое открытое множество может быть получено из множеств семейства $\mathfrak{F}$ при помощи операций подобного преобразования, переноса, пересечения в конечном числе и соединения.

Очевидно, чтобы определить в E топологию, достаточно определить в E семейство $\mathfrak{F}$: приведенное семейство открытых множеств.

Теорема 4. *Для того чтобы топология была выпукла, достаточно, чтобы приведенное семейство $\mathfrak{F}$ удовлетворяло условиям: каждое множество из $\mathfrak{F}$ есть выпуклое окружение нуля открытым образом, и, кроме того, пересечение всех множеств из $\mathfrak{F}$ не содержит ни одного бесконечного луча [или иначе: для каждого $x \in E, x \neq 0$ можно указать $U \in \mathfrak{F}$ с $|x/U| > 0$].*

Если пространство E—линейное топологическое, то в нем можно обычным образом ввести понятие сходимости точек, понятие ограниченности множеств ([3]).

Введем еще следующее обозначение. Если U—окружение нуля в E и $G \subset E$, то обозначим $|G/U| = \sup |x/U|$, $x \in G$. Отметим, что $|G/U|$ может быть бесконечно.

Полезные критерии ограниченности множеств и сходимости точек непосредственно вытекают из

Теоремы 5. *Пусть E—локально-выпуклое пространство и $\mathfrak{F}$—приведенное семейство открытых множеств, удовлетворяющее условиям теоремы 4 и, кроме того, такое, что из $U \in \mathfrak{F}$ следует $-U \in \mathfrak{F}$. Тогда любая окрестность нуля в E содержит окрестность нуля вида $aP(U_1, U_2, \ldots, U_n)$, где a вещественно > 0 и $Ui \in \mathfrak{F}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$.*

Следствие 1. Для того чтобы $x_n \to 0$, необходимо и достаточно, чтобы $|x_n/U| \to 0$, каково бы ни было $U \in \mathfrak{F}$.

Следствие 2. Для того чтобы G было ограничено, необходимо и достаточно, чтобы $|G/U| < \infty$, каково бы ни было $U \in \mathfrak{F}$.

Таким образом для исследования топологических свойств локально-выпуклого пространства E достаточно во многих случаях оперировать с семейством функционалов $|x/U|$, где $U \in \mathfrak{F}$.

Пусть теперь E—любое линейное пространство. Выберем в этом пространстве конечное число выпуклых окружений нуля открытым образом $U_1, U_2, \ldots, U_m$ таких, что $P(U_1, U_2, \ldots, U_m)$ окружает нуль конечным образом. Примем это семейство множеств за приведенное семейство открытых множеств. Тем самым мы введем в E выпуклую топологию. Пространство E с этой топологией есть нормированное пространство.

Если в линейном пространстве E в качестве приведенного семейства открытых множеств выбрать исчислимое семейство множеств, удовлетворяющее условиям теоремы 4, то пространство E превратится в метрическое пространство.

3. Пусть E—линейное топологическое пространство ([4]). В этом параграфе мы будем рассматривать такие выпуклые окружения в E, которые являются «чуждыми» топологии E. Каковы топологические свойства подобных окружений?

Мы будем в дальнейшем употреблять такие топологические термины, как замыкание множества $G \subset E$ (обозначая его через $\overline{G}$), множеств 1-й и 2-й категории и т. д. Все эти термины имеют здесь обычный смысл.

Теорема 6. *Если U — выпуклая окрестность нуля в E, отличная от всего пространства, то* $|\overline{U}/U| = 1$.

Теорема 7. *Если E — 2-й категории, а U — выпуклое окружение нуля открытым образом, то возможны лишь два случая: либо $|\overline{U}/U| = \infty$, либо U открыто [сравни ([5])].*

Теорема 8. *Если E — 2-й категории, то всякое выпуклое окружение нуля U плотно в некоторой выпуклой окрестности нуля V, причем $\overline{U} = \overline{V}$.*

Теорема 9. *Для того чтобы пространство 2-й категории было нормируемо, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовало выпуклое ограниченное окружение.*

Последняя теорема представляет собой усиление известного критерия Колмогорова ([6]), достигнутое за счет сужения области применимости критерия.

Определение. Пространство E нигде не выпукло, если единственное выпуклое открытое множество в нем — это все пространство.

Теорема 10. *В нигде не выпуклом пространстве 2-й категории всякое выпуклое окружение везде плотно.*

В качестве применения последней теоремы мы выскажем, наконец,

Теорему 11. *Пусть E — нигде не выпуклое пространстго 2-й категории и $f(x)$ — аддитивный однородный функционал в E, не равный тождественно нулю. Тогда $f(x)$ принимает в любой окрестности любой точки значения, сколь угодно близкие к любому числу.*

4. Укажем некоторые примеры. Пространство S функций $x(t)$, измеримых на интервале $(a \leqslant t \leqslant b)$ с обычной метрикой ([7]), есть пространство типа (F) ([8]). Следовательно, оно линейное топологическое 2-й категории, а так как оно также нигде не выпукло, то для него имеют место все теоремы предшествующего параграфа.

Рассмотрим далее пространство l^p, где $0 < p < 1$, последовательностей вещественных чисел $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, суммируемых с p-ой степенью: $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty$. Наряду с этим рассмотрим пространство L^p функций $x(t)$, p-ая степень которых суммируема в интервале (a, b):

$$\int_a^b |x(t)|^p \, dt < \infty.$$

Положим в пространстве l^p

$$\rho(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p$$

и в пространстве L^p

$$\rho(0,x) = \int_a^b |x(t)|^p\, dt$$

Согласно этому рассматриваемые пространства станут пространствами типа (F). Далее, пространство l^p не локально выпукло [сравни ([2])], а пространство L^p нигде не выпукло. Теоремы предшествующего параграфа освещают некоторые парадоксальные обстоятельства в этих пространствах.

Мы используем результаты этой заметки при построении теории пространства сопряженного и второго сопряженного к локально-выпуклому пространству.

Институт математики и механики
Ленинградского государственного университета

Поступило
26 XI 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. v. Neumann, Trans. of Am. Math. Soc., **37**, 18 (1938). [2] A. Tychonoff, Math. Ann., **111**, 768 (1937). [3] J. v. Neumann, loc. cit., p. 7. [4] A. Kolmogoroff, St. Math., 5, 29 (1934). [5] И. Гельфанд, Мат. сб., **4** (46), 241 (1938). [6] А. Колмогоров, loc. cit., p. 31. [7] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa (1932). [8] Ibid., p. 35.