Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 2

МАТЕМАТИКА

Академик А. Н. КОЛМОГОРОВ

СПИРАЛЬ ВИНЕРА И НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ ИНТЕРЕСНЫЕ КРИВЫЕ В ГИЛЬБЕРТОВСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Мы рассмотрим здесь некоторые частные случаи кривых, которым посвящена моя предыдущая заметка «Кривые в гильбертовском пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений» (1).

Преобразованием подобия в гильбертовском пространстве H будем называть любое преобразование A в самого себя, представимое в виде

$$A = a + qUx,$$

где a—фиксированный элемент пространства H, U—унитарный оператор, а q—действительное число, большее нуля.

Определение. Функция $\xi(t)$ класса $\mathfrak{K}$ принадлежит классу $\mathfrak{A}$, если при любом действительном $k \neq 0$ существует такое преобразование подобия A_k, что

$$\xi(kt) = A_k \xi(t)$$

для всех t.

Если заменить пространство Гильберта в наших определениях конечномерным унитарным пространством, то единственными функциями класса $\mathfrak{A}$ будут линейные функции вида

$$\xi(t) = ut + v$$

(где u и v—фиксированные элементы пространства). Тем более интересно, что в гильбертовском пространстве существуют другие типы функций класса $\mathfrak{A}$. Геометрически каждая функция класса $\mathfrak{A}$ определяет кривую в пространстве H, инвариантную по отношению к группе преобразований подобия, зависящих от двух параметров, которые позволяют отобразить кривую на самою себя так, что любая заданная пара ее точек x и $y \neq x$ перейдет в любую другую заданную пару точек x' и $y' \neq x'$, лежащих на той же кривой.

Теорема 6. *Функция* $B_\xi(\tau_1, \tau_2)$, *соответствующая функции* $\xi(t)$ *класса* $\mathfrak{A}$, *может быть представлена в виде*

$$B_\xi(\tau_1, \tau_2) = c\,[|\tau_1|^\gamma + |\tau_2|^\gamma - |\tau_1 - \tau_2|^\gamma],$$

где c *и* γ—*действительные константы, удовлетворяющие неравенствам*

$$c \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant 2.$$

Очевидно, что в случае $B_\xi(\tau_1, \tau_2)$, не тождественно равного нулю, константы

$$c = c_\xi \quad \text{и} \quad \gamma = \gamma_\xi$$

однозначно определяются по функции $F_\xi(\tau_1, \tau_2)$, а следовательно, и по самой функции $\xi(t)$. Ясно также, что $B_\xi(\tau_1, \tau_2)$ может быть тождественно равным нулю только в случае, если $\xi(t)$ постоянно. В дальнейшем мы отбрасываем этот исключительный случай и считаем, что

$$\gamma_\xi > 0, \quad c_\xi > 0.$$

Мы видим, таким образом, что функции класса $\mathfrak{A}$ характеризуются с точностью до преобразований движения в пространстве H инвариантами α_ξ, c_ξ и γ_ξ. Что касается соответствующих кривых, то они определяются с точностью до конгруэнтности инвариантами α_ξ и γ_ξ [изменение же c_ξ не меняет вида кривой, изображаемой функцией $\xi(t)$, а связано лишь с изменением выбора параметра t].

Теорема 7. *Любым* $\alpha\,(=0, 1, 2, \ldots,$ *или* $\infty)$, $c\,(c > 0)$ *и* $\gamma\,(0 < \gamma \leqslant 2)$ *соответствует хотя бы одна функция* $\xi(t)$ *класса* $\mathfrak{A}$ *с*

$$\alpha_\xi = \alpha, \quad c_\xi = c, \quad \gamma_\xi = \gamma.$$

Для функции класса $\mathfrak{A}$, соответствующей данным α, c и γ, имеем при $\gamma < 2$

$$\theta_\xi = 0, \quad F_\xi(\Delta_\lambda) = \frac{c}{D}\int\limits_{\Delta_\lambda} \frac{d\lambda}{|\lambda|^{\gamma+1}},$$

где

$$D = 4\int\limits_0^\infty \frac{\left(\sin\frac{\lambda}{2}\right)^2}{\lambda^{\gamma+1}}\,d\lambda.$$

В случае же $\gamma = 2$ имеем

$$\theta_\xi = 2c, \quad F_\xi(\Delta_\lambda) = 0.$$

В последнем случае ($\gamma = 2$) сама функция $\xi(t)$ линейна (т. е. геометрически изображает прямую в пространстве H).

Рассмотрим теперь специально класс $\mathfrak{W}$ функций $\xi(t)$ класса $\mathfrak{A}$, для которых

$$\gamma_\xi = 1.$$

Кривые, соответствующие этому классу функций, назовем спиралями Винера. В соответствии с вышесказанным спираль Винера определяется с точностью до конгруэнтности единственным инвариантом α_ξ. Если же интересоваться лишь расположением кривой в соответствующем пространстве H_ξ, то можно сказать, что все спирали Винера конгруэнтны друг другу. Точно это обозначает следующее: для любых двух спиралей Винера, определяемых функциями ξ_1 и ξ_2, существует взаимно однозначное соответствие между H_{ξ_1} и H_{ξ_2} вида

$$y = a + Ux,$$

где a—фиксированный элемент H_{ξ_1}, а U—изометрический линейный оператор, которое преобразует первую кривую во вторую.

Теорема 8. *Для того чтобы функция класса* $\mathfrak{K}$ *принадлежала классу* $\mathfrak{W}$, *необходимо и достаточно, чтобы для любых двух непересекающихся интервалов*

$$s_1 < t < t_1, \quad s_2 < t < t_2$$

оси t *имело место равенство*

$$[\xi(t_1) - \xi(s_1),\ \xi(t_2) - \xi(s_2)] = 0.$$

На геометрическом языке теорему 8 можно выразить так: спирали Винера вполне характеризуются двумя следующими свойствами:

1) они инвариантны по отношению к некоторой НОГ движений;

2) их хорды, соответствующие двум неперекрывающимся дугам, ортогональны.

Откладывая доказательство перечисленных теорем до другой публикации, дадим здесь несколько дополнительных замечаний и примеров.

1) При $\gamma < 2$ функция $\xi(t)$ класса $\mathfrak{A}$ не дифференцируема (как в смысле сильной, так и в смысле слабой сходимости).

2) Если $\xi(t)$ принадлежит классу $\mathfrak{A}$, то различным значениям t соответствуют различные ξ. Это свойство не обязательно для функций класса $\mathfrak{K}$, среди которых имеются, в частности, периодические.

3) Значения функции $\xi(t)$ класса $\mathfrak{A}$ неограничены по норме. Так как значения функции класса $\mathfrak{K}_0$ имеют постоянную норму, то отсюда вытекает, что классы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{K}_0$ не пересекаются.

4) Пример реализации спирали Винера. Рассмотрим гильбертовское пространство H_0 комплексных функций $f(z)$ действительного аргумента $z(-\infty < z < +\infty)$ с конечным интегралом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)|^2 dz,$$

в котором скалярное произведение определено обычной формулой

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\overline{g}(z)\, dz.$$

При $t \geqslant 0$ положим $\xi(t)$ равным функции $f(z)$, которая равна 1, если $0 \leqslant z \leqslant t$, и равна 0 для остальных z.

При $t \leqslant 0$ положим $\xi(t)$ равным функции $f(z)$, которая равна -1, если $t \leqslant z \leqslant 0$, и равна 0 для остальных z.

Легко проверить, что $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 8.

5) Применение функций классов $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{W}$ в теории вероятностей. Пусть дано какое-либо поле вероятностей (для определений см. мои «Основные понятия теории вероятностей», Москва, 1936). Комплексные случайные величины x этого поля с конечным математическим ожиданием

$$E|x|^2$$

образуют, если их скалярное произведение определить формулой

$$(x, y) = E(x\overline{y}),$$

унитарное пространство R конечного или бесконечного числа измерений Наиболее интересен случай бесконечно мерного пространства со счетным базисом. В этом случае R удовлетворяет всем аксиомам гильбертовского пространства. Если каждому t поставлена в соответствие случайная величина $\xi(t)$, то говорят, что $\xi(t)$ есть случайная функция. Будем считать что $\xi(t)$ при каждом t принадлежит R и непрерывна в смысле сходимости по норме в R. Тогда

а) Принадлежность $\xi(t)$ к классу $\mathfrak{K}_0$ совпадает со стационарностью случайной функции $\xi(t)$ в широком смысле (в теории вероятностей играет большую роль также другое понятие «стационарности в узком смысле», на котором мы здесь не останавливаемся). Стационарные в широком смысле случайные функции подробно изучены А. Я. Хинчиным (2).

b) Если случайная функция $\xi(t)$ принадлежит классу $\mathfrak{K}$, то ее естественно назвать случайной функцией со стационарными (в широком смысле) приращениями. Их детальное изучение являлось одной из очередных задач теории вероятностей и может быть проведено на основе изложенных нами в (1) результатов.

c) Требование

$$[\xi(t_1)-\xi(s_1),\quad \xi(t_2)-\xi(s_2)]=0$$

теоремы 8 на языке теории вероятностей обозначает равенство нулю коэффициента корреляции между приращениями $\xi(t)$ на двух непересекающихся интервалах оси t. Таким образом случайные функции класса $\mathfrak{W}$—это функции со стационарными (в широком смысле) и некоррелированными приращениями.

Частный случай такого рода случайных функций, встречающийся при изучении броуновского движения, и привел Винера еще в 1923 г. [см. (3)] к рассмотрениям, которые в переводе на геометрический язык приводят к описанным выше спиралям Винера.

Поступило
28 XI 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, ДАН, XXVI, № 1 (1939). [2] А. Я. Хинчин, Успехи матем. наук, стр. 42—56 (1938). [3] H. Wiener, Journ. of Math. and Physics (1923).