Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XXI, № 6

МАТЕМАТИКА

С. БАХВАЛОВ

ПАРА РАССЛОЯЕМЫХ КОНГРУЭНЦИЙ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 23 X 1938)

Две конгруэнции L_1 и L_2 с соответственными лучами l_1 и l_2 называют парой расслояемых конгруэнций в двух направлениях, если с каждой из них (L_j) можно связать ∞^1 поверхностей $\sum_j$ так, что: 1) касательные плоскости к поверхностям $\sum_1$ вдоль луча l_1 проходят через l_2 и 2) касательные плоскости к поверхностям $\sum_2$ вдоль луча l_2 проходят через l_1.

Пусть L_3 — конгруэнция общих перпендикуляров l_3 к лучам l_1 и l_2 и N_1, N_2 — точки пересечения лучей l_1, l_2 с l_3.

Присоединим к системе конгруэнций L_1, L_2, L_3 трехгранник T так, чтобы его вершина M совпала с серединой отрезка $N_1 N_2$ и единичные векторы $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_3$ имели направления лучей l_1, l_2, l_3.

Перемещение такого трехгранника определяется следующей системой:

$$d\bar{M} = \omega_1 \cdot \bar{I}_1 + \omega_2 \cdot \bar{I}_2 + \omega_3 \cdot \bar{I}_3, \quad d\bar{I}_j = \omega_{j1}\bar{I}_1 + \omega_{j2}\bar{I}_2 + \omega_{j3}\bar{I}_3 \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Дифференциальные формы $\omega_i = a_i du + b_i dv$, $\omega_{i,j} = a_{i,j}\, du + b_{i,j}\, dv$ удовлетворяют условиям

$$\omega_{11} = -p\omega_{12}, \ \omega_{22} = -p\omega_{21}, \ dp = (1-p^2)(\omega_{12} + \omega_{21}), \tag{1}$$

$$\omega_{31} + p\omega_{32} + \omega_{13} = 0, \ \omega_{31} \cdot p + \omega_{32} + \omega_{23} = 0 \tag{2}$$

В этих уравнениях $p = \bar{I}_1 \cdot \bar{I}_2 = \cos \omega$.

Если L_1 и L_2 — расслояемые в двух направлениях конгруэнции, то к уравнениям (1, 2) присоединяется следующая система:

$$[\omega_3 - da, \ \omega_{13}] + [2a\omega_{12}, \ \omega_{23}] = 0; \ [\omega_3 + da, \ \omega_{23}] + [-2a\omega_{21}, \ \omega_{13}] = 0, \tag{3}$$

$$[\omega_1 - a\omega_{31}, \ \omega_3 + da] + [\omega_2 + a\omega_{32}, \ 2a\omega_{21}] = 0; \ [\omega_2 + a\omega_{32}, \ \omega_3 - da] + [\omega_1 - a\omega_{31}, \ -2a\omega_{12}] = 0, \tag{4}$$

$$-[\omega_1, \ \omega_{13}] + [\omega_2, \ \omega_{23}] = 0, \tag{5}$$

$$[da \ \ \omega_3] + [\omega_{12} \ \ \omega_{21}] \cdot 2a^2 = 0, \tag{6}$$

где $2a = N_1 N_2$.

В настоящей заметке рассматривается случай, определяемый условиями:

1) $da = 0$,
2) $dp = 0$.

Из условия $dp = 0$ и уравнений (1, 5) следует, что

$$\omega_{12} = -\omega_{21} = k\omega_1 - l\omega_2 \tag{7}$$

и

$$\omega_{13}=u\omega_1+v\omega_2,\quad \omega_{23}=-v\omega_1-w\omega_2. \tag{8}$$

Полагая $\omega_3=s\omega_1+t\omega_2$ и подставляя значения ω_3, da, ω_{13}, ω_{23}, ω_{12}, ω_{21} в уравнения (3), получаем:

$$2a(kw+lv)=sv-tu,\quad 2a(kv+lu)=s\cdot w-t\cdot v. \tag{9}$$

Возможны два случая: I) $uw-v^2=0$, II) $uw-v^2\neq 0$.

I) Если $uw-v^2=0$, то конгруэнция L_3 состоит из прямых одного направления.

II) Если $uw-v^2\neq 0$, то из уравнений (9) определяем

$$s=2a\cdot\frac{(wv-uv)k+(v^2-u^2)l}{v^2-u\cdot w};\quad t=2a\cdot\frac{(w^2-v^2)k+(vw-uv)l}{v^2-u\cdot w}. \tag{10}$$

Подставляя значения s, t и форм $\omega_3, da, \omega_{31}$ в уравнения (4), получаем

$$(w-u)\cdot(wk+vl)=0,\quad (w-u)\cdot(vk+ul)=0. \tag{11}$$

Случай $uw-v^2=0$ отпадает; если $wk+vl=0$ и $vk+ul=0$, то $k=l=0$, $\omega_{12}=\omega_{21}=0$, $\omega_3=0$.

Из условия $\omega_{12}'=0$ следует, что $uw-v^2=0$, а это противоречит нашему предположению.

Если в уравнениях (11) $w=u$, то

$$\omega_{13}=u\omega_1+v\omega_2,\quad \omega_{23}=-v\omega_1-u\omega_2. \tag{12}$$

Подставляя значение $w=u$ в (10), получаем

$$s=2al,\quad t=-2ak. \tag{13}$$

Изменив обозначения, мы для ω_{ik} получаем следующие значения:

$$\omega_{31}=A\omega_1-B\omega_2,\quad \omega_{32}=B\omega_1-A\omega_2,\quad \omega_{12}=k\omega_1-l\omega_2,\quad \omega_{21}=-k\omega_1+l\omega_2;$$
$$\omega_{13}=-(A+pB)\,\omega_1+(B+pA)\,\omega_2;\quad \omega_{23}=-(Ap+B)\,\omega_1+(Bp+A)\,\omega_2;$$
$$\omega_{11}=-p\omega_{12},\quad \omega_{22}=-p\omega_{21},\quad \omega_3=2a\,(l\omega_1-k\omega_2).$$

Дифференцируем эту систему внешним образом; из полученной системы следует, что решение задачи зависит от четырех функций одного аргумента.

Рассмотрим некоторые свойства таких пар.

Возьмем на лучах l_3 по две точки N_1' и N_2', симметричные относительно M так, чтобы расстояние $N_1'N_2'=2a'$, где a' — постоянная; через эти точки проведем прямые l_1', l_2', перпендикулярные к l_3; единичные векторы $\bar I_1'$, $\bar I_2'$ прямых l_1', l_2' определим условиями:

$$\bar I_1'=\frac{\bar I_1+\lambda\bar I_2}{\sqrt{1+2\lambda p+\lambda^2}},\quad \bar I_2'=\frac{\bar I_1\lambda+\bar I_2}{\sqrt{1+2\lambda p+\lambda^2}}. \tag{14}$$

$$\frac{a'}{a}=\frac{1-\lambda^2}{1+2\lambda p+\lambda^2}. \tag{15}$$

Нетрудно видеть, что **конгруэнции лучей** l_1' и l_2' **расслояемы** в двух направлениях.

Из уравнения (15) для каждого a' определяем два значения λ, соответствующие двум различным расслояемым конгруэнциям (L_1', L_2') и (L_1'', L_2''), причем лучи l_2', l_1' ортогональны соответственно лучам l_1'', l_2''.

Уравнение (15) можно иначе представить так:

$$\frac{a'}{a}=\frac{\sin\omega'}{\sin\omega},$$

где ω' — угол двух соответственных лучей l_1', l_2'.

В одной из предыдущих работ ([1]) был рассмотрен частный случай таких пар конгруэнций.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета.

Поступило
25 X 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Bachvaloff, C. R., Sur les couples de congruences rectilignes (1937).