Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XXI, № 4

МАТЕМАТИКА

В. К. ТУРКИН и Н. Е. ДЮБЮК

ОБ ОДНОМ ПРИЗНАКЕ НЕПРОСТОТЫ ГРУППЫ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 22 IX 1938)

В работе «Ueber Herstellung und Anwendungen der monomialen Darstellungen endlicher Gruppen» В. К. Туркин (1) доказал следующую теорему:

«Пусть $\mathfrak{G}$ — группа и $\mathfrak{H}$ — ее подгруппа. Пусть

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}G_2 + \ldots + \mathfrak{H}G_s.$$

Пусть A — элемент $\mathfrak{G}$. Пусть

$$G_\lambda A = H^{(\lambda)} G_{i_\lambda}$$

($H^{(\lambda)}$ — элемент $\mathfrak{H}$). Если произведение

$$H^{(1)} H^{(2)} \ldots H^{(s)}$$

не принадлежит коммутанту $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель».

Приведенный критерий непростоты конечной группы для случая, когда подгруппа $\mathfrak{H}$ является абелевой, целесообразно представить в другой форме.

Введем следующие обозначения, применявшиеся уже в работе В. К. Туркина «Квазинормализаторы и мономиальные представления» (2), а также в совместной работе авторов «О строении простых групп» (3).

Пусть $\mathfrak{H}$ есть попрежнему подгруппа группы $\mathfrak{G}$ и пусть $\mathfrak{A}$ есть другая подгруппа группы $\mathfrak{G}$, заключающая в себе $\mathfrak{H}$. Пусть

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}\Gamma_2 + \mathfrak{H}\Gamma_3 + \ldots + \mathfrak{H}\Gamma_z.$$

Пусть $\Gamma_\lambda A = \overline{H}^{(\lambda)} \Gamma_{i_\lambda}$ ($\overline{H}^{(\lambda)}$ есть элемент подгруппы $\mathfrak{H}$). Мы будем обозначать произведение

$$\overline{H}^{(1)} \overline{H}^{(2)} \ldots \overline{H}^{(s)}$$

через

$$\Pi(\mathfrak{A}, A).$$

Докажем теперь следующее предложение:

Теорема. *Пусть A — элемент порядка n абелевой подгруппы $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$, причем всякий элемент $\mathfrak{H}$, сопряженный со степенью A, есть снова степень A. Пусть $n = \prod_{i=1}^{k} p_i$, где все p_i — простые числа и $\mathfrak{N}$ — наименьшее кратное нормализаторов циклических групп $\left\{A^{\frac{n}{p_i}}\right\}$. Если $\Pi(\mathfrak{N}, A)$ не равно единице, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель.*

Для случая n, равного степени простого числа, теорема эта была выведена в упомянутой выше работе ([2]).

Доказательство. Пусть

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}G_2 + \ldots + \mathfrak{H}G_s \tag{1}$$

и

$$G_\lambda A = H^{(\lambda)} G_{i\lambda}, \tag{2}$$

так что

$$\Pi(\mathfrak{G}, A) = H^{(1)} H^{(2)} \ldots H^{(s)}. \tag{3}$$

На основании цитированного вначале предложения, если произведение $\Pi(\mathfrak{G}, A)$ не равно единице, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель. Для доказательства теоремы достаточно поэтому показать, что

$$\Pi(\mathfrak{G}, A) = \Pi(\mathfrak{N}, A).$$

Иначе говоря, достаточно показать, что при вычислении произведения (3) следует принимать в расчет только те факторы $H^{(i)}$, которые соответствуют в смысле равенства (2) вычетам разложения (1), входящим в состав группы $\mathfrak{N}$.

Пусть некоторый вычет разложения (1) G_l не принадлежит группе $\mathfrak{N}$. Рассмотрим совокупность элементов

$$G_l,\ G_lA,\ G_lA^2,\ \ldots,\ G_lA^{n-1}. \tag{4}$$

Нетрудно показать, что все элементы совокупности (4) принадлежат различным смежным системам разложения (1). В самом деле из равенства вида

$$G_lA^r = HG_l,$$

где H — некоторый элемент группы $\mathfrak{H}$, вытекало бы

$$G_l^{-1}HG_l = A^r,$$

и по условию теоремы элемент H должен был бы представлять собой степень A. С другой стороны, элементы, трансформирующие степень A в какую-либо другую степень A, исчерпаны в группе $\mathfrak{N}$, к которой G_i по предположению не принадлежит.

Мы можем следовательно рассматривать элементы (4) как вычеты разложения (1). Умножив все элементы ряда (4) (справа) на A, получаем:

$$G_lA,\ G_lA^2,\ \ldots,\ G_lA^n = G_l. \tag{5}$$

Совокупность элементов (5) отличается от исходной совокупности (4) только порядком расположения элементов. Таким образом произведение элементов $H^{(i)}$, соответствующих в смысле равенства (2) вычетам (4), равно единице.

Если в среде вычетов разложения (1) G_i найдется какой-нибудь не входящий в состав группы $\mathfrak{N}$ и не принадлежащий ни одной из смежных систем

$$\mathfrak{H}G_l,\ \mathfrak{H}G_lA,\ \mathfrak{H}G_lA^2,\ \ldots,\ \mathfrak{H}G_lA^{n-1},$$

то он послужит исходным пунктом для построения новой системы вычетов, вполне аналогичной (4) и для которой будут также справедливы предыдущие рассуждения.

В конце концов приходим к выводу, что

$$\Pi(\mathfrak{G}, A) = \Pi(\mathfrak{N}, A).$$

Теорема таким образом доказана.

Поступило
27 IX 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Turkin, Mathem. Annalen, 111, H. 5. [2] В. К. Туркин, Изв. Акад. Наук СССР, № 4 (1938). [3] В. К. Туркин и П. Е. Дюбюк, ДАН, XX, № 7—8 (1938).