Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XXI, № 4

МАТЕМАТИКА

В. К. ТУРКИН

О НОРМАЛЬНЫХ ДЕЛИТЕЛЯХ В ГРУППАХ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 2 IX 1938)

В своей работе «Квазинормализаторы и мономиальные представления» (1) автор настоящей заметки показал, каким образом методы теории квазинормализаторов могут быть использованы для получения критериев простоты конечной группы. В этой работе автором была доказана следующая теорема:

«Пусть $\mathfrak{G}$ есть группа порядка $p^{\alpha} n$ (p — нечетное простое число; $p(p-1)$ взаимно просто с n). Пусть A есть элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$. Если порядок нормализатора элемента $A^{p^{k-1}}$ относительно группы $\mathfrak{G}$ не делится на p^{2k}, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель, порядок которого делится на n.»

В работе В. К. Туркина и П. Е. Дюбюка «О строении простых групп» (2) дано следующее обобщение этой теоремы:

«Пусть $\mathfrak{P}$ — абелева подгруппа порядка p^{α} некоторой группы $\mathfrak{G}$ порядка $p^{\beta} n$ (p — нечетное простое число; n не делится на p). Пусть A — элемент подгруппы $\mathfrak{P}$ порядка p^{α}, причем всякий элемент $\mathfrak{P}$, сопряженный с A^z, равен A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod{p}$. Если порядок нормализатора $A^{p^{k-1}}$ не делится на $p^{\alpha+k}$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель порядка, делящегося на n.»

Очевидно, что теорема, доказанная в работе (1), является частным случаем теоремы, доказанной в работе (2) (случаем $\mathfrak{P} = \{A\}$).

Сформулируем еще более общую теорему:

Пусть $\mathfrak{G}$ есть группа порядка $p^{\alpha} n$ (p — нечетное простое число, n не делится на p). Пусть $\mathfrak{H}$ есть подгруппа порядка p^{β} группы $\mathfrak{G}$ и пусть $\mathfrak{K}$ есть коммутант подгруппы $\mathfrak{H}$.

Пусть A есть элемент порядка p^k подгруппы $\mathfrak{H}$, обладающий тем свойством, что всякий элемент подгруппы $\mathfrak{H}$, сопряженный с A^z, содержится в одной из смежных систем $\mathfrak{R} A^{mz}$, где $m \equiv 1 \pmod{p}$. Пусть A^{p^r} есть наименьшая степень элемента A, содержащаяся в $\mathfrak{K}$.

Если произведение порядка нормализатора элемента $A^{p^{k-1}}$ на число элементов подгруппы $\mathfrak{H}$, сопряженных с $A^{p^{k-1}}$, не делится на $p^{\beta+r}$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель, порядок которого делится на n.

Теорема, доказанная в работе (1), является очевидно частным случаем этой последней теоремы (случаем, когда подгруппа $\mathfrak{H}$ — абелева).

Доказательство рассматриваемой нами теоремы может быть проведено тем же методом, что и доказательство вышеприведенных теорем, но с некоторыми усложнениями.

Пусть $\mathfrak{A}$ есть некоторая подгруппа группы $\mathfrak{G}$ и пусть $\mathfrak{B}$ есть пересечение этой подгруппы с подгруппой $\mathfrak{H}$.

Пусть

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{B} Z_2 + \mathfrak{B} Z_3 + \ldots + \mathfrak{B} Z_a.$$

Пусть далее

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H} G_2 + \mathfrak{H} G_3 + \ldots + \mathfrak{H} G_t.$$

Мы можем очевидно предположить, что каждый из элементов Z_i равен одному из элементов G_j.

Пусть

$$Z_i A = H_i G_{\lambda_i},$$

где H_i — элемент подгруппы $\mathfrak{H}$. Мы введем обозначение

$$H_1 H_2 H_3 \ldots H_a = \Pi(\mathfrak{A}, A).$$

Символ $\Pi(\mathfrak{A}, A)$, введенный в настоящей работе, является очевидно обобщением символа $\Pi(\mathfrak{A}, A)$, введенного в работе ([1]).

Индекс относительно $\mathfrak{A}$ подгруппы $\mathfrak{B}$ (пересечения $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{H}$) мы будем обозначать через $\nu(\mathfrak{A})$.

Если в качестве $\mathfrak{A}$ мы возьмем какой-либо квазинормализатор $\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{Ap^i}$, то

$$\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{Ap^i}, A) = K A^s,$$

где K — элемент коммутанта $\mathfrak{K}$ (показатель степени s в этой формуле очевидно определен с точностью до слагаемого, делящегося на r). Мы будем обозначать число s через $\omega(\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{Ap^i})$.

Относительно введенных нами символов можно доказать следующие леммы:

I. $$\nu(\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{Ap^i})\,\omega(\mathfrak{N}^{\lambda_i}_{Ap^{i+1}}) = \nu\,\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{Ap^{i+1}})\,\omega(\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{Ap^i}).$$

II. Если $\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{Ap^i} \neq \mathfrak{N}_{Ap^i}$ и $\lambda \leqq \lambda_{i-1}$, то

$$\omega(\mathfrak{N}^{(\lambda-1)}_{Ap^i}) = \sigma\,\omega(\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{Ap^i}), \quad \text{где} \quad \sigma \equiv p \pmod{p^2}.$$

Величина λ_i имеет здесь то же значение, как и в работе ([1]): это есть наибольшее значение числа λ, для которого

$$\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{Ap^i} = \mathfrak{N}^{(1)}_{Ap^i}.$$

Если $\lambda_i = k - i$, то в формулировке леммы I полагаем, что $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{Ap^{i+1}} = \mathfrak{N}^{(k-i-s)}_{Ap^{i+1}}$. Лемма II справедлива и при $i = 0$; условие $\lambda \leqslant \lambda_{i-1}$ в этом случае теряет смысл и должно быть отброшено.

Рассмотрим, как и в работе ([1]), последовательность квазинормализаторов

$$\begin{array}{llll}
\mathfrak{N}^{(k)}_{A},\ \mathfrak{N}^{(k-1)}_{A},\ \ldots,\ \mathfrak{N}^{(\lambda_0)}_{A} & & & \\
 & \mathfrak{N}^{(\lambda_0)}_{Ap},\ \mathfrak{N}^{(\lambda_0-1)}_{Ap},\ \ldots,\ \mathfrak{N}^{(\lambda_1)}_{Ap} & & \\
 & & \mathfrak{N}^{(\lambda_1)}_{Ap^2},\ \mathfrak{N}^{(\lambda_1-1)}_{Ap^2},\ \ldots,\ \mathfrak{N}^{(\lambda_2)} & \\
 & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
 & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
 & & \quad \mathfrak{N}^{1}_{Ap^{k-i}} &
\end{array}$$

Мы получаем, что если $\nu(\overset{(1)}{\mathfrak{N}}_{A^{p^{1-k}}}) = p^{\delta}t$, где t не делится на p, то $\omega(\overset{(1)}{\mathfrak{N}}_{A^{p^{k-1}}}) = s$, где $s \equiv 0 \pmod{p^{\delta}} \not\equiv 0 \pmod{p^{\delta+1}}$.

Построим мономиальное представление группы $\mathfrak{G}$ с помощью подгруппы $\mathfrak{H}$ и ее коммутанта $\mathfrak{K}$. Определитель матрицы, соответствующей в этом представлении элементу A, есть элемент дополнительной группы $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{K}}$, соответствующий смежной системе $\mathfrak{K}A^{c\,\omega(\overset{(1)}{\mathfrak{N}}_{A^{p^{k-1}}})}$, где c — число элементов подгруппы $\mathfrak{H}$, сопряженных с элементом $A^{p^{k-1}}$. Этот определитель может быть равен единице только в том случае, если число $c\,\omega(\overset{(1)}{\mathfrak{N}}_{A^{p^{k-1}}})$ делится на p^r. Но в этом последнем случае произведение порядка нормализатора элемента $A^{p^{k-1}}$ на число элементов подгруппы $\mathfrak{H}$, сопряженных с $A^{p^{k-1}}$, делится на $p^{\beta+r}$. В противном случае группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель, порядок которого делится на n. Таким образом наша теорема доказана.

Поступило
23 IX 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. К. Туркин, Изв. Акад. Наук СССР, № 4 (1938). [2] В. К. Туркин и П. Е. Дюбюк, ДАН, XX, № 7—8 (1938).