Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XXI, № 5

ГЕОФИЗИКА

Н. МИГАЛЬ

# ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ АНОМАЛИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ПО АСТРОНОМО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ ОТКЛОНЕНИЯМ ОТВЕСА

*(Представлено академиком С. И. Вавиловым 15 X 1938)*

Трудности определения фигуры геоида (1), а также разностей моментов инерции Земли (2) заключаются в том, что для этого необходимо знать распределение аномалий силы тяжести для всей поверхности Земли, непосредственное измерение которых сопряжено с большими трудностями для большинства областей земного шара. Поэтому заслуживают внимания косвенные способы определения их в упомянутых областях. Настоящая статья посвящена одному из таких способов.

Обозначая расстояние от уровенного эллипсоида до геоида через $N$, имеем:

$$N = H + L, \tag{1}$$

где $H$ — расстояние от того же эллипсоида до референц-эллипсоида, $L$ — расстояние от референц-эллипсоида до геоида.

Взяв частную производную по $\varphi$, где $\varphi$ — широта точки, получим:

$$\frac{1}{a_0}\frac{\partial N}{\partial \varphi} = \frac{1}{a_0}\frac{\partial H}{\partial \varphi} + \frac{1}{a_0}\frac{\partial L}{\partial \varphi}. \tag{2}$$

Здесь $a_0$—средний радиус Земли.

Рассмотрим теперь все величины, входящие в формулу (2). $\frac{1}{a_0}\frac{\partial N}{\partial \varphi}$, абсолютное отклонение отвеса в плоскости меридиана, определяется по формуле Венинг Мейнеца (3):

$$\frac{1}{a_0}\frac{\partial N}{\partial \varphi} = \frac{1}{4\pi a_0^2 g_0}\int_S \Delta g \frac{Q(\psi)}{\sin\psi}\cos\alpha\, d\sigma. \tag{3}$$

В (3) приняты такие обозначения: $g_0$ — среднее ускорение силы тяжести Земли; $d\sigma$ — элемент поверхности сферы $S$ радиуса $a_0$; $\Delta g$ — аномалия Фая (H. Faye), отнесенная к элементу $d\sigma$;

$$Q(\psi) = \cos^2\frac{\psi}{2}\left\{\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} + 12\sin\frac{\psi}{2} - 32\sin^2\frac{\psi}{2} + \frac{3}{1+\sin\frac{\psi}{2}} - 12\sin^2\frac{\psi}{2}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)\right\};$$

$\psi$ — сферическое расстояние от точки $A$ с широтой $\varphi$, в которой определяется отклонение отвеса, до элемента поверхности $d\sigma$; $\alpha$ — азимут направления с этой точки на элемент $d\sigma$.

Для определения $\frac{1}{a_0}\frac{\partial H}{\partial \varphi}$ воспользуемся формулой проф. Ф. Н. Красовского [4] (мы ее выписываем несколько в ином и упрощенном виде):

$$H=\left\{\sin\varphi\sin\varphi'+\cos\varphi\cos\varphi'\cos\omega-1\right\}\Delta a+a_0\sin^2\varphi'\left\{\sin\varphi\sin\varphi'+\right.$$
$$\left.+\cos\varphi\cos\varphi'\cos\omega-\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'}\left(2-\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'}\right)\right\}\Delta\mu-M'\left\{\sin\varphi'\cos\varphi\cos\omega-\right.$$
$$\left.-\sin\varphi\cos\varphi'\right\}\delta\varphi'+R'\cos\varphi\cos\varphi'\sin\omega\,\delta\lambda'-\left\{\sin\varphi\sin\varphi'+\cos\varphi\cos\varphi'\cos\omega\right\}N'.$$

Получим:

$$\frac{1}{a_0}\frac{\partial H}{\partial\varphi}=\left\{\cos\varphi\sin\varphi'-\sin\varphi\cos\varphi'\cos\omega\right\}\frac{\Delta a}{a_0}+\sin^2\varphi'\left\{\cos\varphi\sin\varphi'-\right.$$
$$\left.-\sin\varphi\cos\varphi'\cos\omega-\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi'}\left(2-\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'}\right)+\frac{\sin 2\varphi}{2\sin^2\varphi'}\right\}\Delta\mu+$$
$$+\left\{\sin\varphi\sin\varphi'\cos\omega+\cos\varphi\cos\varphi'\right\}\delta\varphi'-\sin\varphi\cos\varphi'\sin\omega\,\delta\lambda'-$$
$$-\left\{\cos\varphi\sin\varphi'-\sin\varphi\cos\varphi'\cos\omega\right\}\frac{N'}{a_0}. \qquad (4)$$

Здесь $\omega$ — долгота точки $A$, отсчитываемая от меридиана, проходящего через точку $B$, в которой ориентирован референц-эллипсоид; $\varphi'$ — широта точки $B$; $\Delta a$ — разность между большими полуосями уровенного эллипсоида и референц-эллипсоида; $\Delta\mu$ — разность сжатий тех же эллипсоидов; $\delta\varphi'$ и $\delta\lambda'$ — изменения широты и долготы, обусловленные абсолютным отклонением отвеса в точке $B$; $N'$ — расстояние между уровенным эллипсоидом и геоидом в той же точке.

Что касается последнего члена, входящего в формулу (2), то он $\left(\frac{1}{a_0}\frac{\partial L}{\partial\varphi}=\varepsilon_m\right.$ — астрономо-геодезическое отклонение отвеса в плоскости меридиана$\left.\right)$ определяется из астрономо-геодезических измерений.

Подставив в формулу (2) выражения (3) и (4), приняв во внимание при этом, что согласно формулам Венинг Мейнеца [3]

$$\delta\varphi'=\frac{1}{4\pi a_0^2 g_0}\int\limits_s \Delta g\frac{Q(\psi')}{\sin\psi'}\cos\alpha'\,d\sigma;$$
$$\delta\lambda'=\frac{1}{4\pi a_0^2 g_0\cos\varphi'}\int\limits_s \Delta g\frac{Q(\psi')}{\sin\psi'}\sin\alpha'\,d\sigma$$

и согласно формуле Стокса [1]

$$N'=\frac{1}{4\pi a_0 g_0}\int\limits_s \Delta g\,S(\psi')\,d\sigma,$$

получим:

$$\frac{1}{4\pi a_0^2 g_0}\int\limits_s \Delta g\frac{Q(\psi)}{\sin\psi}\cos\alpha\,d\sigma=\left\{\cos\varphi\sin\varphi'-\sin\varphi\cos\varphi'\cos\omega\right\}\frac{\Delta a}{a_0}+$$
$$+\sin^2\varphi'\left\{\cos\varphi\sin\varphi'-\sin\varphi\cos\varphi'\cos\omega-\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi'}\left(2-\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'}\right)+\frac{\sin 2\varphi}{2\sin^2\varphi'}\right\}\Delta\mu+$$
$$+\frac{1}{4\pi a_0^2 g_0}\left\{\sin\varphi\sin\varphi'\cos\omega+\cos\varphi\cos\varphi'\right\}\int\limits_s \Delta g\frac{Q(\psi')}{\sin\psi'}\cos\alpha'\,d\sigma-$$
$$-\frac{1}{4\pi a_0^2 g_0}\sin\varphi\sin\omega\int\limits_s \Delta g\frac{Q(\psi')}{\sin\psi'}\sin\alpha'\,d\sigma-\frac{1}{4\pi a_0^2 g_0}\left\{\cos\varphi\sin\varphi'-\right.$$
$$\left.-\sin\varphi\cos\varphi'\cos\omega\right\}\int\limits_s \Delta g\,S(\psi')\,d\sigma+\varepsilon_m, \qquad (5)$$

где

$$S(\psi') = \operatorname{cosec}\frac{\psi'}{2} + 1 - 6\sin\frac{\psi'}{2} - 5\cos\psi' - 3\cos\psi' \ln\left[\sin\frac{\psi'}{2} + \sin^2\frac{\psi'}{2}\right],$$

$\psi'$ — сферическое расстояние от точки $B$ до элемента $d\sigma$, $\alpha'$ — азимут направления с этой точки на элемент поверхности $d\sigma$.

Разделим всю поверхность Земли на $n$ областей. Пусть в $m$ областях сила тяжести непосредственно измерена; тогда количество областей, в которых сила тяжести неизвестна, равно $n-m$. Нетрудно видеть, что формула (5) доставляет нам одно уравнение с $n-m$ неизвестными аномалиями силы тяжести, представляющими $n-m$ областей. В самом деле, заменив интегралы, входящие в формулу (5), суммами, получим уравнение вида:

$$\sum_{i=m+1}^{i=n} E_i \Delta g_i + K = 0, \tag{6}$$

где

$$E_i = \frac{1}{4\pi a_0^2 g_0}\left\{\frac{Q(\psi_i)}{\sin\psi_i}\cos\alpha_i - [\sin\varphi\sin\varphi'\cos\omega + \cos\varphi\cos\varphi']\frac{Q(\psi_i')}{\sin\psi_i'}\cos\alpha_i' + \right.$$

$$\left. + \sin\varphi\sin\omega\frac{Q(\psi_i')}{\sin\psi_i''}\sin\alpha_i' + [\cos\varphi\sin\varphi' - \sin\varphi\cos\varphi'\cos\omega]\, S(\psi_i')\right\}\Delta\sigma_i;$$

$$K = \sum_{i=1}^{i=m} E_i\Delta g_i - \{\cos\varphi\sin\varphi' - \sin\varphi\cos\varphi'\cos\omega\}\frac{\Delta a}{a_0} - \sin^2\varphi'\left\{\cos\varphi\sin\varphi' - \right.$$

$$\left. - \sin\varphi\cos\varphi'\cos\omega - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi'}\left(2 - \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'}\right) + \frac{\sin 2\varphi}{2\sin^2\varphi'}\right\}\Delta\mu - \varepsilon_m.$$

При выводе уравнения (6) мы дифференцировали (1) по $\varphi$; дифференцируя его по $\omega$, получим еще одно уравнение:

$$\sum_{i=m+1}^{i=n} E_i'\Delta g_i + K' = 0, \tag{7}$$

где

$$E_i' = \frac{1}{4\pi a_0^2 g_0}\left\{\frac{Q(\psi_i)}{\sin\psi_i'}\sin\alpha_i - \sin\varphi'\sin\omega\frac{Q(\psi_i')}{\sin\psi_i}\cos\alpha_i' - \cos\omega\frac{Q(\psi_i')}{\sin\psi_i}\sin\alpha_i' - \right.$$

$$\left. - \cos\varphi'\sin\omega\cdot S(\psi_i')\right\}\Delta\sigma_i,$$

$$K' = \sum_{i=1}^{i=m} E_i'\Delta g_i + \cos\varphi'\sin\omega\frac{\Delta a}{a_0} + \sin^2\varphi'\cos\varphi'\sin\omega\,\Delta\mu - \cos\varphi\,\delta\omega;$$

$\delta\omega$ — поправка к долготе $\omega$, обусловленная астрономо-геодезическим отклонением отвеса.

Определив астрономо-геодезическое отклонение отвеса в $\frac{n-m}{2}$ пунктах и составив указанным здесь способом систему линейных уравнений с $n-m$ неизвестными, мы получим, решив ее, аномалии силы тяжести, относящиеся к $n-m$ областям.

Кафедра высшей геодезии.
Инженерно-строительный институт.
Харьков.

Поступило
23 IX 1938.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C. C. Stokes, On the Variation of Gravity at the Surface of the Earth. [2] Н. Мигаль, ДАН, XIX, № 9 (1938). [3] F. Vening Meunesz, A Formula Expressing the Deflection of the Plumb Line, 31 (1928). [4] Ф. Н. Красовский, Доклады VII конфер. Балт. геодез. комиссии (1934).