Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XXI, № 5

МАТЕМАТИКА

М. КЕЛДЫШ

К ТЕОРИИ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА, КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ В ПОТОКЕ ВОЗДУХА

(Представлено академиком С. А. Чаплыгиным 11 X 1938)

Рассмотрим крыло, проектирующееся в область S плоскости xoy, поверхность которого дается уравнением* $z=\zeta(x, y)e^{i\nu t}$ (где t — время, ν — круговая частота колебаний) и которое находится в потоке воздуха, имеющем при $x=-\infty$ скорость V, направленную по оси x. Пусть $2a$ и $2b$ — проекции S на оси x и y; величину $\Lambda=\frac{b}{a}$ мы будем называть удлинением крыла.

Мы будем предполагать, что величина ζ мала (крыло не сильно отличается от плоского) и что вихревая поверхность, сходящая с крыла, мало уклоняется от своей проекции на плоскость xoy. Кроме этого при нахождении потенциала скоростей мы будем пренебрегать квадратами возмущенной скорости потока и, предполагая, что размах крыла Λ велик, будем пренебрегать членами порядка малости Δ^{-2}.

Обозначим через $c=c(y)$ полухорду крыла в сечении $y=\text{const}$, через $x_c=c\delta$ — координату центра хорды сечения и положим

$$\omega=\frac{\nu c}{V}, \quad \theta=-\frac{1}{4}\left(\frac{\nu b}{V}\right)^2.$$

В каждом сечении y мы введем свою координату $x_0=x-c\delta$ и положим

$$\left.\begin{aligned} &\zeta_0(x_0, y)=\zeta(x, y)\\ &\mathfrak{v}_0(x_0, y)=\frac{V}{c}\left(i\omega\zeta_0+c\frac{\partial\zeta_0}{\partial x}\right)\\ &\mathfrak{V}_0(x_0, y)=\frac{1}{c}\int \mathfrak{v}_0(x_0, y)\,dx_0 \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Кроме этих обозначений мы будем пользоваться обычными обозначениями для функций Бесселя и Ганкеля и обозначениями функций Матье, принятыми в таблицах Айнса.

Пусть ΔP — разность давлений на нижней и верхней поверхностях крыла; положим:

$$\Delta P=\rho\varkappa(x, y)e^{i\nu t}, \quad \varkappa_0(x_0, y)=\varkappa(x, y).$$

* Здесь, как и всюду в дальнейшем, когда слева стоит величина, действительная по своему физическому смыслу, надо равенство понимать в том смысле, что берется действительная часть выражения, стоящего справа.

Тогда имеем:

$$\varkappa_0(x_0, y) = \frac{2V}{\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{c^2 - x_0^2}}\int_{-c}^{+c}\frac{\mathfrak{v}_0(s, y)\sqrt{c^2 - s^2}}{x_0 - s}\,ds + \right.$$

$$+ i\omega\sqrt{c^2 - x_0^2}\int_{-c}^{+c}\frac{\mathfrak{V}_0(s, y)\,ds}{(x_0 - s)\sqrt{c^2 - s^2}} +$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{c^2 - x_0^2}}\,\frac{iJ_1(\omega) - \frac{x_0}{c}J_0(\omega)}{J_0(\omega) - iJ_1(\omega)}\int_{-c}^{+c}\mathfrak{v}_0(s, y)\sqrt{\frac{c+s}{c-s}}\,ds\right\} +$$

$$+ \frac{e^{-i\omega\delta}F(y)}{\pi c\,[J_0(\omega) - iJ_1(\omega)]}\sqrt{\frac{c - x_0}{c + x_0}}\,. \tag{2}$$

Функция $F(y)$ определяется формулой

$$F(y) = \int_{-c(1-\delta)}^{+c(1+\delta)}\varkappa(x, y)\,e^{\frac{i\nu}{V}x}\,dx, \tag{3}$$

и в случае $\nu = 0$ величина $\rho F(y)\,dy$ есть подъемная сила, действующая на элемент dy крыла. Для определения $F(y)$ полагаем $y = -b\cos\tau$, $0 < \tau < \pi$ и

$$F(y) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n se_n(\tau, \theta). \tag{4}$$

Коэффициенты A_n этого разложения должны быть определены так, чтобы удовлетворялось соотношение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n k_n se_n(\tau, \theta) = \frac{b\omega}{c}\left[\frac{H_0^{(2)}(\omega) - iH_1^{(2)}(\omega)}{J_0(\omega) - iJ_1(\omega)} - 1\right]\sum_{n=1}^{\infty} A_n se_n(\tau, \theta)\cdot\sin\tau +$$

$$+ \frac{4bVe^{i\omega\delta}\sin\tau}{\pi c\,[J_0(\omega) - iJ_1(\omega)]}\int_{-c}^{+c}\mathfrak{v}_0(s, y)\sqrt{\frac{c+s}{c-s}}\,ds. \tag{5}$$

Входящие сюда коэффициенты k_n вычисляются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} k_{2n+1} &= -\frac{1}{se_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, \theta\right)}\left[\frac{\nu b}{V}se_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, \theta\right) + \frac{b}{\pi}\int_0^{\pi}K(b\cos\tau)\,d\,se_{2n+1}(\tau, \theta)\right] \\ k_{2n} &= -\frac{1}{\sqrt{2}\,se_{2n}\left(\frac{\pi}{4}, \theta\right)}\left[\frac{\nu b}{V}se_{2n}\left(\frac{\pi}{4}, \theta\right) + \right. \\ &\left. + \frac{b}{\pi}\int_0^{\pi}K\left[b\left(\cos\tau - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]dse_{2n}(\tau, \theta)\right]\end{aligned}\right\}, \tag{6}$$

где положено

$$\text{при } \alpha > 0 \quad K(\alpha) = -\frac{\pi\nu}{2V}\int_{\frac{\nu\alpha}{V}}^{+\infty}\frac{H_1^{(1)}(i\rho)}{\rho}\,d\rho, \quad K(-\alpha) = -K(\alpha). \tag{7}$$

Из соотношения (5) для определения A_n получаем бесконечную систему уравнений:

$$k_m A_m = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{m,\,n} A_n + \beta_m\,, \tag{8}$$

где положено

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{n,\,m} &= \frac{2b}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{\omega}{c}\left[\frac{H_0^{(2)}(\omega) - iH_1^{(2)}(\omega)}{J_0(\omega) - iJ_1(\omega)} - 1\right] se_m(\tau,\theta)\cdot se_n(\tau,\theta)\sin\tau\, d\tau \\ \beta_m &= \frac{8bV}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi} \frac{e^{i\omega\delta}\, se_m(\tau,\theta)\sin\tau}{J_0(\omega) - iJ_1(\omega)}\int\limits_{-c}^{+c} \mathfrak{v}_0(s,y)\sqrt{\frac{c+s}{c-s}}\, ds\, d\tau \end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Функция $F(y)$ может быть также определена как решение интегро-дифференциального уравнения

$$F(y) = -\frac{4V}{\pi\omega} e^{i\omega\delta}\frac{\int\limits_{-c}^{+c}\mathfrak{v}_0(s,y)\sqrt{\frac{c+s}{c-s}}\,ds}{H^{(2)}(\omega) - iH_1^{(2)}(\omega)} - \frac{c}{\pi\omega}\frac{J_0(\omega) - iJ_1(\omega)}{H_0^{(2)}(\omega) - iH_1^{(2)}(\omega)}\int\limits_{-b}^{+b} K(y-\eta)\; dF(\eta). \tag{10}$$

Аэродинамические силы, действующие на крыло, могут быть выражены через функцию $F(y)$ следующим образом. Подъемная сила, действующая на элемент dy крыла:

$$dA(y) = \rho\left\{-2V\omega\int\limits_{-c}^{+c}\frac{s\mathfrak{B}_0(s,y)}{\sqrt{c^2-s^2}}\,d \;+ \frac{2ViJ_1(\omega)}{J_0(\omega) - iJ_1(\omega)}\int\limits_{-c}^{+c}\mathfrak{v}_0(s,y)\sqrt{\frac{c+s}{c-s}}\,ds + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-i\omega\delta}F(y)}{J_0(\omega) - iJ_1(\omega)}\right\} dy\, e^{i\nu t}. \tag{11}$$

Момент, действующий на сечение dy, относительно фокуса $f\left(x_0 = -\frac{c}{2}\right)$ сечения, положительное направление которого считается от оси y к оси x:

$$dM_f(y) = \rho dy V e^{i\nu t}\int\limits_{-c}^{+c}\frac{[\mathfrak{v}_0(s,y) + i\omega\mathfrak{B}_0(s,y)]\,(2s^2 + cs - c^2)}{\sqrt{c^2-s^2}}\,ds\,. \tag{12}$$

Среднее значение лобовой силы, действующей на все крыло, за период колебаний:

$$Q_{\text{ср}} = -\frac{\rho}{4\pi V^2}\int\limits_{-b}^{+b}[1 - \pi\omega^2\delta i\,(J_0(\omega) + iJ_1(\omega))(H_0^{(2)}(\omega) - iH_1^{(2)}(\omega))]\,\frac{|F(y)|^2}{J_0^2(\omega) + J_1^2(\omega)}\frac{dy}{c} +$$

$$+ \frac{\rho}{2\pi V}\int\limits_{-b}^{+b}\overline{F}(y)\, e^{i\omega\delta}\left[-\frac{1 + 2i\omega\delta}{J_0(\omega) - iJ_1(\omega)}\int\limits_{-c}\mathfrak{v}_0(s,y)\sqrt{\frac{c+s}{c-s}}\,ds + \right.$$

$$\left. + \frac{i\omega V}{J_0(\omega) + iJ_1(\omega)}\frac{1}{c}\int\limits_{-c}\zeta_0(s,y)\sqrt{\frac{c+s}{c-s}}\,ds\right]\frac{dy}{c} -$$

$$-\frac{i\rho V}{\pi}\int\limits_{-b}^{+b}\left[\frac{J_0(\omega)}{J_0(\omega) + iJ_1(\omega)}\frac{1}{c}\int\limits_{-c}^{+c}\frac{s\zeta_0(s,y)\,ds}{\sqrt{c^2-s^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{iJ_1(\omega)}{J_0(\omega) + iJ_1(\omega)}\int\limits_{-c}^{+c}\frac{\zeta_0(s,y)\,ds}{\sqrt{c^2-s^2}}\right]\int\limits_{-c}^{+c}\overline{\mathfrak{v}}_0(s,y)\sqrt{\frac{c+s}{c-s}}\,d\;\;\frac{\omega dy}{c}. \tag{13}$$

Если движение крыла может быть представлено как сумма периодических колебаний с различными периодами, то подъемная сила, момент и среднее значение лобовой силы для результирующего колебания могут быть представлены как суммы этих же величин для составляющих колебаний. Для подъемной силы и момента результат остается верным и для сложения колебаний с одинаковым периодом.

В случае установившегося движения $\nu = 0$ и полученные формулы вырождаются в формулы теории Прандтля для установившегося движения крыла конечного размаха. В частности (5) переходит в известное соотношение Треффтца, а (10) в интегральное уравнение Прандтля. В этом случае $F(y) = V\Gamma(y)$, где $\Gamma(y)$ — циркуляция.

Устремляя в наших формулах ν в бесконечность, мы получим следующий результат. При больших частотах подъемная сила и момент, действующие на элемент dy крыла, равны dy, умноженному на подъемную силу или момент цилиндрического крыла с характеристиками элемента dy в плоско-параллельном потоке. Лобовая сила равна сумме лобовых сил элементов, рассчитанных по теории плоско-параллельного потока. В частности отсюда следует, что существуют формы колебаний крыла такие, что при больших частотах лобовая сила, действующая на крыло, тянет его вперед. Это например будет иметь место всегда для колебаний вида

$$z = f(y)\, e^{i\nu t}.$$

Если размах крыла $\Lambda \to \infty$, то полученные нами формулы вырождаются в формулы теории колеблющегося крыла в плоско-параллельном потоке. Для получения этих формул надо положить

$$F(y) = -\frac{4V}{\pi\omega}\,\frac{\int\limits_{-c}^{+c} \mathfrak{v}_0(s)\sqrt{\frac{c+s}{c-s}}\,ds}{H_0^{(2)}(\omega) - iH_1^{(2)}(\omega)}.$$

Из этих формул мы отметим здесь только формулу для лобовой силы, которая, насколько нам известно, в таком законченном виде еще не была отмечена:

$$Q_{0,\,\text{ср}} = \frac{\rho}{\pi c}\int\limits_{-c}^{+c} \mathfrak{V}_0(s)\sqrt{\frac{c+s}{c-s}}\,ds\left[-\frac{iH_0^{(1)}(\omega)\cdot H_1^{(2)}(\omega)}{|H_0^{(1)}(\omega)+iH_1^{(1)}(\omega)|^2}\int\limits_{-c}^{+c}\mathfrak{v}_0(s)\sqrt{\frac{c+s}{c-s}}\,ds -\right.$$

$$\left. -\frac{\omega i H_0^{(1)}(\omega)\cdot V}{H_0^{(1)}(\omega)+iH_1^{(1)}(\omega)}\cdot\frac{1}{c}\int\limits_{c-}^{+c}\frac{s\zeta_0(s)\,ds}{\sqrt{c^2-s^2}} + \frac{\omega H_1^{(1)}(\omega)\cdot V}{H_0^{(1)}(\omega)+iH_1^{(1)}(\omega)}\int\limits_{-c}^{+c}\frac{\zeta_0(s)\,ds}{\sqrt{c^2-s^2}}\right].$$

Центральный аэро-гидродинамический институт им. Н. Е. Жуковского.

Поступило 13 X 1938.