Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XXI, № 5

МАТЕМАТИКА

Н. ГЮНТЕР, член-корреспондент Академии Наук СССР

К ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛОВ СТИЛЬТЬЕСА-РАДОНА И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Положим, что даны ограниченная область (Ω) и тело (C) областей, принадлежащих (Ω). Положим, дана средняя функция $u(\omega)$ ограниченной вариации, имеющая тело (C) телом непрерывности(1).

В соответствие функции $u(\omega)$ можно привести функцию от ансамблей $u(e)e$, определенную в некотором теле (U) ансамблей (e). Обозначая через $\overline{u(e)e}$ низшую границу сумм $\sum u(i_n)\,i_n$, в которых (i_n)—интервалы, принадлежащие (C), не имеющие общих внутренних точек и покрывающие (e), говорят, что (e) принадлежит (U), если $\overline{u(e)e}$ не отлично от $\overline{u(o)o-u(o-e)(o-e)}$, где (o)—открытый ансамбль, заключающий (e); в этом случае полагают

$$u(e)e=\overline{u(e)e}. \tag{1}$$

Функция от ансамблей $u(e)e$ абсолютно аддитивна; тело (U) содержит все ансамбли, измеримые (B); если трактовать область (ω) как ансамбль точек, то $u(\omega)\omega$ равно значению данной функции для области (ω), если (ω) принадлежит телу непрерывности (C).

Если

$$v(\omega)=u_1(\omega)-u_2(\omega)+i\,[u_3(\omega)-u_4(\omega)], \tag{2}$$

где средние функции $u_k(\omega)$ ограниченной вариации и с положительными значениями, то в соответствие $v(\omega)$ приводим функцию

$$v(e)e=u_1(e)e-u_2(e)e+i\,[u_3(e)e-u_4(e)e]. \tag{3}$$

Эта функция определена в теле (V), образующем общую часть тел (U_k), $k=1,\ 2,\ 3,\ 4$.

2. Положим, дана функция точек (x), принадлежащих (Ω):

$$f(x)=f_1(x)+if_2(x), \tag{4}$$

в которой f_1 и f_2 измеримы (B) и ограничены. Положим, что значения $f_1(x)$ и $f_2(x)$ заключены между l_0 и $l=l_n$; вставим между l_0 и l числа $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}$ и обозначим через (e_k), (e'_k) ансамбли точек, для которых соответственно:

$$l_{k-1}\leqslant f_1(x)<l_k,\quad l_{k-1}\leqslant f_2(x)<l_k. \tag{5}$$

Положим $(e_{ks})=(e_k\cdot e_s)$. Суммы

$$\sum_{s=1}^{s=n}\sum_{k=1}^{k=n}(l_{k-1}+il_{s-1})\,v(e_{ks})\,e_{ks} \tag{6}$$

имеют определенный предел, когда $n \to \infty$, а разности $l_k - l_{k-1}$ стремятся равномерно к нулю. Мы обозначаем этот предел знаком

$$\int\limits_{(\Omega)} v(\omega) f(x)\, d\omega \tag{7}$$

и называем его интегралом Стильтьеса-Радона. Имеем:

$$\left| \int\limits_{(\Omega)} v(\omega) f(x)\, d\omega \right| \leqslant \int\limits_{(\Omega)} V(\omega)\, |f(x)|\, d\omega < MV(\Omega)\,\Omega, \tag{α}$$

где M — верхняя граница $|(f(x)|$, а $V(\omega)$ — средняя вариация $v(\omega)$. Далее

$$\int\limits_{(\Omega)} v(\omega) f(x)\, d\omega = \sum_{k=1}^{k=n} \int\limits_{(e_k)} v(\omega) f(x)\, d\omega = \sum_{k=1}^{k=n} \int\limits_{(\omega_k)} v(\omega) f(x)\, d\omega, \tag{β}$$

если области (ω_k) принадлежат телу (C) и если ансамбли (e_k) и области (ω_k) образуют деление (Ω) на частичные ансамбли, соответственно области;

$$\int\limits_{(\Omega)} \Big(f(x) + F(x)\Big)\, v(\omega)\, d\omega = \int\limits_{(\Omega)} v(\omega) f(x)\, d\omega + \int\limits_{(\Omega)} v(\omega) F(x)\, d\omega, \tag{γ}$$

$$\int\limits_{(\Omega)} v(\omega) f(x)\, d\omega = \int\limits_{(\Omega)} v(\omega) F(x)\, d\omega, \tag{δ}$$

если функции $f(x)$ и $F(x)$ не равны только в точках ансамбля (e_0), для которого $V(e_0)\, e_0 = 0$; наконец, если $f(x)$ непрерывна, интеграл (7) не отличен от интеграла Стильтьеса, использованного в моем мемуаре[1].

3. Если функция $f(x)$ не ограничена, имея положительные значения, то, положив

$$f^{(n)}(x) = f(x), \text{ если } f(x) \leqslant n; \quad f^{(n)}(x) = n, \text{ если } f(x) > n, \tag{8}$$

мы берем за определение интеграла равенство

$$\int\limits_{(\Omega)} v(\omega) f(x)\, d\omega = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{(\Omega)} v(\omega) f^{(n)}(x)\, d\omega, \tag{9}$$

говоря, что $f(x)$ не суммируема, если предела не существует. Если $f(x)$ комплексная и

$$f(x) = \underset{+}{f_1} - \underset{-}{f_1} + i\,(\underset{+}{f_2} - \underset{-}{f_2}), \tag{10}$$

где $\underset{-}{f_1}$ например равна $-f_1$, если $f_1 < 0$, и нулю, если $f_1 > 0$, то положим,

$$\int\limits_{(\Omega)} v(\omega) f(x)\, d\omega = \int\limits_{(\Omega)} v(\omega) \underset{+}{f_1}\, d\omega - \int\limits_{(\Omega)} v(\omega) \underset{-}{f_1}\, d\omega + $$
$$+ i \left[\int\limits_{(\Omega)} v(\omega) \underset{+}{f_2}\, d\omega - \int\limits_{(\Omega)} v(\omega) \underset{-}{f_2}\, d\omega \right]. \tag{11}$$

Условимся говорить, что интеграл (11) сходится абсолютно, если сходится интеграл

$$\int\limits_{(\Omega)} V(\omega)\, |f(x)|\, d\omega. \tag{12}$$

Утверждения (β), (γ), (δ) справедливы для интегралов (11).

4. Положим, что $u(\omega)$ — средняя функция ограниченной вариации с положительными значениями и $f(x)$ — функция, измеримая (B). Условимся называть среднюю функцию

$$f(\omega) = \frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} u(\omega) f(x)\, d\omega \tag{13}$$

средним взвешенным значением $f(x)$, а $u(\omega)$ — весовой функцией. Средняя вариация $f(\omega)$ равна

$$\frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, |f(x)|\, d\omega. \tag{14}$$

Условимся говорить, что $f(x)$ — с суммируемым квадратом в случае сходимости интеграла

$$\int\limits_{(\Omega)} u(\omega)\, |f(x)|^2\, d\omega. \tag{15}$$

5. Положим, что даны функции $f(x)$ и $F(x)$, измеримые (B), и средняя функция $v(\omega)$. Положим,

$$w(\omega) = \frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} v(\omega)\, F(x)\, d\omega. \tag{16}$$

Если интегралы

$$\int\limits_{(\Omega)} v(\omega) f(x)\, d\omega, \quad \int\limits_{(\Omega)} v(\omega) F(x)\, d\omega, \quad \int\limits_{(\Omega)} v(\omega) f(x) F(x)\, d\omega \tag{17}$$

сходятся абсолютно, то

$$\int\limits_{(\Omega)} w(\omega) f(x)\, d\omega = \int\limits_{(\Omega)} v(\omega) f(x) F(x)\, d\omega. \tag{18}$$

6. Делим (Ω) на области $(\omega_1), (\omega_2), \ldots, (\omega_n)$. Положим, что даны две средние функции ограниченной вариации $\varphi(\omega)$ и $v(\omega)$. Если суммы

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{|\varphi(\omega_k)|^2}{u(\omega_k)}\, \omega_k \tag{19}$$

остаются ограниченными некоторым числом, мы говорим, что $\varphi(\omega)$ — класса (H). Если суммы

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi(\omega_k)\, v(\omega_k)}{u(\omega_k)}\, \omega_k \tag{20}$$

имеют определенный предел, когда $n \to \infty$, а диаметры областей (ω_k) равномерно стремятся к нулю, мы обозначаем этот предел знаком интеграла Hellinger'a:

$$\int\limits_{(\Omega)} \frac{\varphi(\omega)\, v(\omega)}{u(\omega)}\, d\omega. \tag{21}$$

Можно доказать: 1) если $f(x)$ — с суммируемым квадратом и $f(\omega)$ — ее взвешенное среднее, то

$$\int\limits_{(\Omega)} \frac{|f(\omega)|^2}{u(\omega)}\, d\omega = \int\limits_{(\Omega)} u(\omega)\, |f(x)|^2\, d\omega; \tag{22}$$

2) если $\varphi(\omega)$ — класса (H), а $f(x)$ — с суммируемым квадратом, то

$$\int\limits_{(\Omega)} \frac{\varphi(\omega) f(\omega)}{u(\omega)}\, d\omega = \int\limits_{(\Omega)} \varphi(\omega) f(x)\, d\omega. \tag{23}$$

Если число n достаточно велико, то для всякого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\left| \int\limits_{(\Omega)} \varphi(\omega) f(x)\, d\omega - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi(\omega_k) f(\omega_k)}{u(\omega_k)}\, \omega_k \right| < \varepsilon \sqrt{H} \sqrt{u(\Omega)\,\Omega} + g\sqrt{\varepsilon}\sqrt{H}, \tag{24}$$

в котором H — верхняя граница сумм (19), g — абсолютная постоянная и число n не зависит от выбора функции $\varphi(\omega)$.

7. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(\omega) = \lambda \int\limits_{(\Omega)} k(\tau, x)\, \varphi(y)\, d\tau + F(x), \tag{1}$$

ядро которого $k(\tau, x)$ подчинено следующим условиям.

a) Дана весовая функция $u(\omega)$ в теле (C). Функция $k(\tau, x)$ как функция от (τ) задана в теле (C_x), получаемом из (C) откидыванием областей, имеющих точку (x) на границе. Она ограниченной вариации и ее вариация $K(\Omega, x)\,\Omega$ как функция от (x) измерима (B) и с суммируемым квадратом. Из этого определения следует, что $k(\tau, x)$ не конечна только в тех точках, в которых не конечна $K(\Omega, x)\,\Omega$.

b) Ядро $k(\tau, x)$ эрмитово, т. е.

$$\overline{k(\tau,\omega)} = \overline{k(\omega,\tau)}, \quad k(\tau,\omega) = \frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} u(\omega)\, k(\tau, x)\, d\omega; \tag{2}$$

c) средняя вариация $K(\tau, x)$ удовлетворяет неравенству

$$\int\limits_{(\Omega)} K(\Omega, z)\, \Omega K(\xi, x)\, d\xi < BK(\Omega, x)\,\Omega. \tag{3}$$

Ядра $k(\tau, x)$ моего мемуара [1] удовлетворяют указанным условиям.

Указанные условия обеспечивают: 1) существование повторных ядер $k_n(\tau, x)$, где

$$k_n(\tau, x) = \int\limits_{(\Omega)} k_{n-1}(\tau, x)\, k(\xi, x)\, d\xi; \tag{4}$$

2) вариации повторных ядер функции с суммируемым квадратом, удовлетворяющие неравенству

$$K_n(\Omega, x)\,\Omega < B^{n-1} K(\Omega, x)\,\Omega. \tag{5}$$

8. Обозначая буквой $h(x)$ ограниченную по модулю функцию, вводим функции

$$H(x) = \sum_{l=0}^{l=m} \alpha_l k_l(h, x), \quad k_l(h, x) = \int\limits_{(\Omega)} h(y)\, k_l(\tau, x)\, d\tau, \tag{6}$$

полагая, что $k_0(\tau, x) = \delta(\tau, x)$, где $\delta(\tau, x)\tau$ равна нулю или единице, смотря по тому, лежит ли (x) вне (τ) или внутри этой области. Можно установить равенства:

$$\frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} u(\omega) \left(\int\limits_{(\Omega)} H(y)\, k_s(\tau, x)\, d\tau \right) d\omega = \int\limits_{(\Omega)} H(y)\, k_s(\tau, \omega)\, d\omega, \tag{7}$$

$$\int\limits_{(\Omega)} H_1(x) \left(\int\limits_{(\Omega)} k_s(\tau, \omega)\, H(y)\, d\tau \right) d\omega = \int\limits_{(\Omega)} H(y) \left(\int\limits_{(\Omega)} k_s(\tau, \omega)\, H_1(x)\, d\omega \right) d\tau. \tag{8}$$

Установив равенства (7) и (8), можно доказать, что: 1) $k_s(\tau,\omega)$ — эрмитово и что 2), условившись обозначать знаком $k_s(H, H_1)$ левую часть (8), мы имеем

$$0 < k(H,\overline{H}) < B \int\limits_{(\Omega)} u(\omega) \mid H(x) \mid^2 d\omega. \tag{9}$$

Установив неравенство (9), к уравнению (1) можно приложить все рассуждения моего мемуара ([1]), так как в нем неравенство (9) прилагается только к функциям вида (6), и по замечанию, высказанному в § 9 главы **5** второй части, вся теория имеет место благодаря неравенству (9).

9. Когда построена спектральная функция $\theta(\tau, \omega, m)$ и для конечных по модулю функций $h(x)$, $h_1(x)$ установлены формулы

$$\theta(h, h_1, m) = \int\limits_{(\Omega)} h_1(x) \left(\int\limits_{(\Omega)} \theta(\tau, \omega, m)\, h(y)\, d\tau \right) d\omega =$$

$$= \int\limits_{(\Omega)} h(y) \left(\int\limits_{(\Omega)} \theta(\tau, \omega, m)\, h(x)\, d\omega \right) d\tau, \tag{10}$$

$$(\theta(h, h_1, m)\, m) < \sqrt{\int\limits_{(\Omega)} u(\omega) \mid h(x) \mid^2 d\omega}\, \sqrt{\int\limits_{(\Omega)} u(\omega) \mid h_1(x) \mid^2 d\omega}, \tag{11}$$

$$\int\limits_{(\Omega)} \frac{\theta(h, \tau, m)\, m\theta(\tau, h, m)\, m}{u(\tau)} d\tau = \theta(h, h_1, m)\, m, \tag{12}$$

$$\int\limits_{(\Omega)} \frac{\theta(h, \tau, m)\, \theta(\tau, h_1, m_1)}{u(\tau)}\, d\tau = 0; \tag{13}$$

если интервалы (m) и (m_1) не имеют общих внутренних точек, можно доказать, что интегралы

$$\int\limits_{(\Omega)} \theta(\tau, \omega, m)\, h(y)\, d\tau, \quad \int\limits_{(\Omega)} h_1(x) \left(\int\limits_{(\Omega)} \theta(\tau, \omega, m)\, h(y)\, d\tau \right) d\omega \tag{14}$$

имеют смысл и тогда, когда $h(x)$ и $h_1(x)$ — с суммируемым квадратом, и что формулы (10), ..., (13) остаются справедливыми для таких функций. Это приводит к заключению, что теоремы о разложимости функций, которым посвящена гл. 4 моего мемуара, остаются действительными для функций с суммируемым квадратом.

10. Исходя из теории уравнений, отвечающих условиям § 7, и применяя прием, использованный Т. Карлеманом в его замечательном мемуаре[4], можно построить теорию интегральных уравнений более общую, чем теория Т. Карлемана, охватывающую случаи, в которых ядро $k(\tau, x)$ или весовая функция $u(\omega)$ — не ограниченной вариации.

Ленинградский университет.

Поступило
11 X 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Günther, Recueil mathématique, 1-re partie, **42**, ch. **1**, § 1, 2, 3, 4. [2] Schlesinger u. Plessner, Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen, p. 151. [3] Recueil mathématique, **44**, p. 198 et 387. [4] T. Carleman, Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique. Uppsala Universitets Arskrift (1923).