Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XXI, № 3

МАТЕМАТИКА

В. В. НЕМЫЦКИЙ

СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ ТИПА БЕНДИКСОНА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 9 IX 1938)

§ 1. При изучении расположения кривых на плоскости, являющихся решениями дифференциальных и функциональных уравнений, основными фактами являются теоремы Пуанкаре-Бендиксона, изложенные в их классических мемуарах. Цель настоящей заметки — указать локальную характеристику семейств кривых на плоскости, для которых теоремы Бендиксона имеют силу.

§ 2. Введем определение. Назовем семейство кривых семейством типа Бендиксона, если:

I. Через каждую точку плоскости проходит одна и только одна кривая. Некоторые кривые вырождаются в точки. Эти точки называем особыми точками.

II. Пусть дана область G, содержащая одну особую точку; тогда каждая полукривая, целиком погруженная в эту область, есть:

1) замкнутая кривая, окружающая особую точку;

2) имеет в качестве предельной точки только эту особую точку;

3) спираль, наматывающаяся на замкнутую кривую, окружающую особую точку;

4) спираль, неограниченно приближающаяся к замкнутой кривой, проходящей через особую точку.

Заметим, что из этих требований вытекает выполненность следующих положений:

1) если кривая имеет предельные точки на себе, она замкнута;

2) внутри каждой замкнутой кривой есть хотя бы одна особая точка.

§ 3. Назовем, следуя Керекьярто [1], точку $\overline{a}$ плоскости регулярной, если можно найти окрестность (область) точки $\overline{a}$, для которой существует такое взаимно-однозначное и непрерывное отображение, при котором отрезки кривых, заполняющих эту окрестность, переходят в отрезки прямых. Окрестность подобного типа будем в дальнейшем называть «достаточно малая окрестность».

Теорема 1. *Если семейство кривых не имеет особых точек и каждая его точка регулярна, то кривые, его составляющие, способны служить траекториями непрерывной однопараметрической группы, и следовательно оно—бендиксоновское.*

Рассмотрим произвольную дугу $\widehat{pq}$ и окружим каждую ее точку «достаточно малой окрестностью». Окрестности предполагаем сферическими и предположим, что выбрано конечное число их так, чтобы они покрывали всю дугу и центр каждой следующей лежал на окружности предыдущей. Установим теперь на дуге $\overset{\frown}{pq}$ некоторое направление и продолжим его на всю кривую семейства $f(p, t)$, на всех дугах первой окрестности, на которых еще не установлено направление; устанавливаем согласное с $\overset{\frown}{pq}$ направление, если конечно на них уже не установлено направление [они могут быть кусками кривой $f(p, t)$]. После того как направление на каком-нибудь отрезке установлено, мы продолжаем его на всю кривую, частью которой он является, так что приходится в дальнейшем устанавливать направления только на отрезках, на которых они не установлены. Покончив с первой окрестностью, переходим ко второй и так далее, пока не дойдем до окрестности точки q.

Покажем теперь, что все дуги малой окрестности $\overset{\frown}{pq}$ будут ориентированы согласно. В самом деле, рассмотрим произвольную точку r на дуге $\overset{\frown}{pq}$; так как r регулярна, то проводим дугу $\overset{\frown}{\alpha\beta}$ так, чтобы каждая дуга в достаточно малой окрестности точки r пересекала (не касалась) дугу $\overset{\frown}{\alpha\beta}$. Если бы направления на дугах были не согласны, то это значит, что некоторая кривая нашего семейства в противоположных направлениях пересекала бы дугу без контакта $\overset{\frown}{\alpha\beta}$, а тогда на основании принципа, провозглашенного еще Пуанкаре и доказанного например в книге Керекьярто([2]), должна была бы существовать особая точка, что противоречит условию теоремы.

Покрываем теперь всю плоскость счетным числом достаточно малых окрестностей и распространим ориентацию на все кривые. Если же семейство состоит из регулярных точек и оно ориентируемо, то, как показал Уитней([3]), оно способно служить траекториями непрерывной однопараметрической группы.

§ 4. Пусть теперь семейство имеет особые точки, но все остальные точки регулярны. Введем следующее определение: назовем семейство кривых «геометрически непрерывным», если, каково бы ни было малое число $\varepsilon > 0$ и какова бы ни была дуга $\overset{\frown}{ab}$ и на ней точка q, можно найти такое δ, что из условия $\rho(c, q) \leqslant \delta$ следует, что на кривой, проходящей через точку c, можно найти дугу, отклонение которой от дуг $\overset{\frown}{ab}$ и $\overset{\frown}{cd}$ было бы меньше, чем ε.

Легко усмотреть, что каждое семейство, все точки которого кроме особых регулярны, будет геометрически непрерывным. Поэтому в случае выполнения условия единственности имеет место теорема:

Множество $\omega(\alpha)$-предельных точек кривой состоит из целых кривых семейства ([2]).

Теорема 2. *Всякое семейство, удовлетворяющее условию единственности и такое, что каждая точка кроме особых регулярна, есть семейство типа Бендиксона.*

Пусть дана кривая, входящая в область или начинающаяся в области и не выходящая из нее; такая кривая имеет динамически предельные точки. Может быть два случая: либо среди них нет особой точки, либо есть особая точка. Первый случай рассмотрен в книге Керекьярто, и применением уже указанного принципа Пуанкаре им было доказано, что либо сама кривая замкнута, либо она—спираль, неограниченно приближающаяся к замкнутой кривой. Пусть среди ω-предельных (α-предельных) точек кривой есть особая точка и пусть далее кроме этой особой точки имеются еще какие-либо ω-предельные точки, например точка q.

Допустим в противоположность доказываемому, что среди α- или ω-предельных точек $f(q,t)$ кроме особой есть еще точка S. На основании упомянутой выше теоремы вся кривая $f(s,t)$ состоит из ω-предельных точек кривой L. Проведем (пользуясь регулярностью) через точку S дугу без контакта $\widehat{\alpha\beta}$; тогда, как обычно (Бендиксон), можно показать, что эту дугу без контакта будет бесчисленное множество раз пересекать кривая L и притом в противоположных направлениях, а тогда на основании принципа Пуанкаре должно существовать бесчисленное множество особых точек внутри области, что противоречит предположению.

Легко привести пример семейства типа Бендиксона такого, что кривые, его составляющие, неспособны служить траекториями непрерывной однопараметрической группы, например семейство концентрических овалов, стягивающихся к отрезку.

Институт математики.
Московский государственный университет.

Поступило
15 IX 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Kerekjarto, Vorlesungen über Topologie, I, 249 (1923). [2] Немыцкий, ДАН, XXI, № 3, 99 (1938). [3] Whitney, Ann. of Math., № 2 (1933).