Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XXI, № 3

МАТЕМАТИКА

В. В. НЕМЫЦКИЙ

О СИСТЕМАХ КРИВЫХ, ЗАПОЛНЯЮЩИХ МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 9 IX 1938)

§ 1. Пусть дано полное метрическое пространство $\mathfrak{M}$. Назовем кривой в этом пространстве совокупность точек, представляющую взаимнооднозначный и непрерывный образ бесконечной прямой. Эту прямую будем называть осью t, а кривую обозначать $f(p,t)$, где p—некоторая точка пространства, через которую проходит эта кривая. Кривые, заполняющие пространство, могут получиться в результате решения обыкновенных дифференциальных уравнений, при решении задач Коши для уравнений в частных производных и вообще при решении функциональных уравнений вида

$$\varphi = V(p, \varphi),$$

где задание p обозначает задание совокупности начальных условий.

Пусть $\mathfrak{M}$—полное метрическое пространство, через некоторые точки которого проходят кривые в вышеопределенном смысле; тогда все точки пространства $\mathfrak{M}$, через которые не проходят кривые или проходят несколько кривых, мы назовем особыми точками и будем считать, что кривые семейства, проходящие через них, вырождаются в точки. Заметим далее, что каждая открытая дуга «кривой» в вышеопределенном смысле может тоже рассматриваться как «кривая».

Кроме того особыми точками считаем точки, в любой окрестности которых находятся «полукривые» рассматриваемого семейства. Заметим, что из этого последнего условия вытекает, что концевые точки кривых—тоже особые точки. Семейство кривых, после того как указанные выше точки этого семейства объявлены особыми точками, назовем семейством S.

Скажем, что семейство кривых «геометрически непрерывно» ([1]), если, каково бы ни было малое число $\varepsilon > 0$ и какова бы ни была дуга $\widehat{ab}$ и на ней точка q, можно найти такое число δ, что из условия $\rho(c, q) \leqslant \delta$ следует, что на кривой, проходящей через точку c, можно найти дугу $d'\widehat{cd}$, отклонение которой от дуг $\widehat{ab}$ меньше или равно ε.

§ 2. Пусть дана некоторая кривая $f(p,t)$; тогда назовем множество $\hat{\varepsilon}_f$ множеством ее динамически предельных точек, если, какова бы ни была точка $q \subset \hat{\varepsilon}_f$, существует последовательность значений параметра t: t_1, t_2, ... t_n, ... , стремящихся к $+\infty$ или к $-\infty$, таких, что

$$\lim_{n \to \infty} \rho[f(p, t_n), q] = 0.$$

Аналогично теории Биркгоффа среди точек множества $\hat{\varepsilon}_f$ различаем $\hat{\varepsilon}_{f\alpha}$ и $\hat{\varepsilon}_{f\omega}$, множества ее α и ω предельных точек.

Теорема 1. *Если одна точка кривой $f(p, t)$ принадлежит к $\hat{\varepsilon}_{f\omega}$ ($\hat{\varepsilon}_{f\alpha}$), то и все остальные точки этой кривой принадлежат к $\hat{\varepsilon}_{f\omega}$ ($\hat{\varepsilon}_{f\alpha}$).*

Пусть точка q кривой $f(p, t)$ принадлежит к $\hat{\varepsilon}_{f\omega}$, т. е. существует последовательность $q_1 = f(p, t_1)$, $q_2 = f(p, t_2), \ldots, q_n = f(p, t_n), \ldots$ сходящаяся к q, причем $t_n \to +\infty$. Возьмем на траектории $f(p, t)$ любую точку r и рассмотрим дугу $\widehat{qr}$. Пусть $\rho(q_1; qr) = \varepsilon_1$. Берем η_1 столь малым, чтобы в η_1 окрестности точки q из всякой точки выходила дуга $\widehat{q_{n_1}r_{n_1}}$, отклонение которой от $\widehat{qr}$ было бы меньше, чем $\frac{\varepsilon_1}{2}$, и конец которой отстоял бы от r меньше, чем на $\frac{\varepsilon_1}{2}$. Этого можно всегда достичь, как это следует из такой леммы.

Пусть дано $\varepsilon > 0$; пусть η столь мало, что из условия $\rho(x, y) \leqslant \eta \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ следует, что диаметр дуги $\widehat{xy}$ будет $\leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, т. е. $d(\widehat{xy}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Опишем $\frac{\eta}{4}$ сферу вокруг дуги $\widehat{qr}$. Каждая дуга ab, расположенная внутри этой сферы и такая, что $\rho(a, q) \leqslant \frac{\eta}{4}$, $\rho(b, q) \leqslant \frac{\eta}{4}$, отклонена на ε от дуги $\widehat{qr}$. Рассмотрим значение параметра для точки r_{n_1}. Пусть $r_{n_1} = f(p, \tau_{n_1})$. Докажем, что $\tau_{n_1} > t_1$, где $q_1 = f(p_1, \tau_{n_1})$. В самом деле, если бы $\tau_{n_1} > t_{n_1}$ [где $q_{n_1} = f(p, \tau_{n_1})$], то, так как $t_{n_1} > t_1$, и $\tau_{n_1} > t_{n_1}$. Пусть $\tau_{n_1} < t_{n_1}$; если бы и $\tau_{n_1} < t_1$, то дуга $\widehat{q_{n_1} r_{n_1}}$ должна была бы содержать точку, соответствующую значению параметра t_1, т. е. точку q_1, но $\rho(q, \widehat{qr}) = \varepsilon_1 > \frac{\varepsilon_1}{2}$, а тогда мы получаем противоречие условию

$$\alpha(qr, q_{n_1}r_{n_1}) \leqslant \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

После этого легко довести доказательство до конца.

Геометрическая непрерывность далее позволяет нам установить, что $\hat{\varepsilon}_{f\alpha}$ и $\hat{\varepsilon}_{f\omega}$ суть инвариантные множества, т. е. множества, состоящие из целых кривых семейства. Для этого сначала мы выведем формулу, которая позволит определить эти множества независимо от введения параметра t на кривых.

Теорема 2. *Если кривая $f(p, t)$ не есть особая точка и не замкнутая траектория, то множество динамически предельных точек может быть определено по формуле:*

$$\varepsilon_f = \hat{\varepsilon}_f = \overline{\overline{f} - f}.$$

Неравенство $\hat{\varepsilon}_f \subset \varepsilon_f$ доказывается тривиально.

Покажем обратное. Пусть $p_0 \subset \hat{\varepsilon}_f$; тогда или $p_0 \subset \overline{f} - f$, и тогда ясно, что $p_0 \subset \varepsilon_f$, или $p_0 \subset \hat{\varepsilon}_f$ и $p_0 \subset f$, но тогда $f(p, t) \subset \hat{\varepsilon}_f$ на основании теоремы 1.

Так как p_0—обыкновенная точка, то найдется такая сфера $S = S(p_0, d)$, что каждая дуга семейства кривых, принадлежащая $\overline{S}$, имеет конечную временную длину, т. е. отображается на отрезок оси t. Обозначим через A пересечение $f \cdot \overline{S}$. Тогда $A = f \cdot \overline{S}$ распадается на счетное число различных дуг L_j $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ кривой f; каждая из этих дуг очевидным образом есть замкнутое множество.

Рассмотрим множество $L_j - (\overline{S} - S)$; оно состоит из конечного или счетного числа открытых дуг L_j^k, т. е.

$$\sum_i \sum_k \overline{L}_j^k \subset f\overline{S} = A.$$

Далее показываем, что каждая из дуг $\overline{L}_j^k$ никогда не плотна на множестве $\overline{A}$, т. е.

$$\overline{A} = \overline{\overline{A} - L_j^k}.$$

Так как $\sum_i \sum_j \overline{L}_j^k$ есть сумма самое большее счетного числа замкнутых множеств, то $\sum_i \sum_j \overline{L}_j^k$ есть множество первой категории на $\overline{A}$.

С другой стороны, $\overline{A}$ есть замкнутое множество, расположенное в полном метрическом пространстве, т. е. оно не может быть первой категории на себе самом, а тогда

$$\overline{\overline{A} - \sum_j \sum_k \overline{L}_j^k} = \overline{A}.$$

Теперь легко показать, что

$$p_0 \subset \overline{\overline{f} - f} = \varepsilon_f.$$

Заметим, что если обозначить f_+ и f_- соответственно положительную и отрицательную полутраектории, то

$$\hat{\varepsilon}_{f\alpha} = \overline{\overline{f}_+ - f_+},$$

$$\hat{\varepsilon}_{f\omega} = \overline{\overline{f}_- - f_-}.$$

Пользуясь этими теоремами, легко установить следующие положения.

Следствие 1. Множество $\hat{\varepsilon}_f$—инвариантное множество. В самом деле, пусть $q \subset \hat{\varepsilon}_f$, тогда $q \subset \overline{f}$ и q не принадлежит f, а тогда $q \subset \overline{f} - f$. Пусть r—любая точка на $f(q, t)$. На основании геометрической непрерывности имеем, что $r \subset \overline{f}$, и так как r не принадлежит к f, то $r \subset \overline{f} - f$, т. е. $r \subset \varepsilon_f$.

Следствие 2. Множества $\varepsilon_{f\omega}$ и $\varepsilon_{f\alpha}$ состоят из целых кривых.

§ 3. Определение 1. Назовем полукривую устойчивой по Лагранжу, если вся она помещается в некотором компактном множестве.

Теорема 3. *Если $\overline{f} = f$, то либо f—точка, либо f—замкнутая траектория, либо каждая полутраектория f неустойчива по Лагранжу.*

Определение 2. Скажем, что кривая $f(p, t)$ имеет седло в бесконечности (2), если существует такое компактное и замкнутое множество C, что, каково бы ни было другое компактное множество C, во множестве C можно будет найти две точки $\overline{p}$ и $\overline{q}$, лежащие на траектории $f(p, t)$, такие, что дуга $\overline{p}\,\overline{q}$ имеет точки вне C_a.

Теорема 4. *Для того, чтобы неустойчивая по Лагранжу траектория была замкнутым множеством, необходимо и достаточно, чтобы она не имела седла в бесконечности.*

§ 4. Определение 1. Кривая $f(p, t)$ называется устойчивой по Пуассону, если ее точки динамически предельны для нее самой, т. е. если

$$f \subset \overline{\overline{f} - f}.$$

Определение 2. Назовем множество кривых A минимальным, если для всякой полукривой f_+ или f_- его составляющей имеет место равенство

$$\overline{f}_+ = \overline{f}_- = A.$$

Роль минимальных множеств и их связь с устойчивыми по Пуассону кривыми характеризуется следующими двумя теоремами.

Теорема 5. *Среди динамически предельных точек устойчивой хотя бы в одну сторону по Лагранжу кривой имеется минимальное множество.*

Теорема 6. *Если минимальное множество компактно, то все составляющие его кривые устойчивы по Пуассону.*

Институт математики.
Московский государственный университет.

Поступило
15 IX 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Гаусдорф, Теория множеств, стр. 166. [2] Niemytzki, Ann. di Math., Ser. IV, XIV (1935—1936).