Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XXI, № 1—2

МАТЕМАТИКА

А. Г. ПИНСКЕР

О РАСШИРЕНИИ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 16 VIII 1938)

Укажем регулярный процесс, позволяющий для всякого линейного полуупорядоченного пространства типа K_5 (1) (пространство Л. В. Канторовича с аксиомами I—V) построить, вообще говоря, более широкое пространство также типа K_5, именуемое в дальнейшем «расширением» исходного пространства. Расширенные пространства обладают свойствами, не имеющими места в произвольных пространствах типа K_5 (подробному исследованию этих свойств будет посвящена особая заметка), в частности расширение расширенного пространства ему изоморфно. Операция расширения пространств дает повод ввести в рассмотрение некоторое обобщение понятий (o)-сходимости и $(*)$-сходимости, а именно: «расширенную (o)-сходимость» и «расширенную $(*)$-сходимость»; во многих конкретных пространствах эти сходимости имеют простое и естественное значение. Так например, расширением пространства L (интегрируемых по Лебегу функций) является пространство S (измеримые функции); расширенной (o)-сходимостью в L будет сходимость почти везде; расширенной $(*)$-сходимостью будет сходимость по мере.

1. Пусть Y — линейное полуупорядоченное пространство типа K_5. Назовем комплексом всякое множество $A = \{a\}$ положительных (включая и нуль) элементов из Y, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1) Если $a \in A$ и $a' < a$ $(a' \geqslant 0)$, то и $a' \in A$.
2) Если E есть ограниченное подмножество A, то

$$\sup E \in A.$$

Условимся комплексы обозначать большими буквами латинского алфавита, а элементы пространства Y — малыми буквами латинского алфавита.

Положим $A \leqslant B$, если $A \subseteq B$.

Лемма 1. *Множество $\widetilde{Y} = \{A, B, \ldots\}$ всевозможных комплексов из Y есть полуупорядоченное пространство.*

Действительно, аксиомы:

A) $A \leqslant A$;
B) если $A < B$ и $B < C$, то $A < C$;
C) каковы бы ни были элементы A и B, существуют C, D такие, что $C < A, B < D$;

D) всякое ограниченное сверху множество имеет верхнюю точную границу;

имеют место в $\tilde{Y}$, причем D) выполняется в наиболее общей форме, а именно: всякое множество комплексов имеет supremum.

Пусть $E=\{A\}$ — множество комплексов, $E \subset \tilde{Y}$, тогда

$$\sup E=\overline{\sum A},$$

где $\overline{\Sigma A}$ есть совокупность элементов Y, принадлежащих комплексам A, дополненная supremum'ами всевозможных ограниченных множеств, составленных из этих элементов (при проверке этого утверждения удобно воспользоваться тождеством:

$$x=\sup_{\xi<\vartheta}\{\inf(x, y_\xi)\}, \text{ если } x<\sup_{\xi<\vartheta}\{y_\xi\}).$$

Определим в $\tilde{Y}$ операции: сложения $A+B$, умножения на неотрицательное число λA $(\lambda \geqslant 0)$ и вычитания $A-B$ $(A \geqslant B)$.

Положим $A+B=\{a+b\}$, где a и b — всевозможные пары элементов из A и B $(a \in A,\ b \in B)$; $\lambda A=\{\lambda a\}$ $(a \in A, \lambda \geqslant 0)$ и $A-B=\overline{\{a-\sup\limits_{b<a}\{b\}\}}=$ $=\overline{\{a-b^*\}}$ $(A \geqslant B,\ a \in A,\ b \in B,\ \sup\limits_{b<a}\{b\}=b^*)$ (черта означает, что множество $\{a-b^*\}$ дополнено supremum'ами всех его ограниченных подмножеств). Легко показать, что $A+B$, λA $(\lambda \geqslant 0)$ и $A-B$ $(A \geqslant B)$ суть комплексы.

Лемма 2. *Для комплексов справедливы следующие соотношения*:

a) $A+B=B+A$;
b) $(A+B)+C=A+(B+C)$;
c) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B \quad (\lambda \geqslant 0)$;
d) $(\lambda_1+\lambda_2) A=\lambda_1 A+\lambda_2 A \quad (\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0)$;
e) $\lambda_1(\lambda_2 A)=\lambda_1, \lambda_2 A \quad (\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0)$;
f) $1 \cdot A=A$;
g) $(A-B)+B=A \quad (A \geqslant B)$.

Проверим например g). Пусть $c \in A-B$ и $c=a-b^*$, $b \in B$; имеем: $c+b=a-b^*+b=\sup(a,b)+\inf(a,b)-b^* \leqslant \sup(a,b)$, так как $\inf(a,b) \leqslant b^*$; далее, $a,b \in A$, следовательно $\sup(a,b) \in A$ и $c+b \in A$. Пусть $c=\sup\{a-b^*\}$, тогда $c+b=\sup\{a-b^*\}+b=\sup\{a-b^*+b\} \leqslant \sup\{\sup(a,b)\}$ и значит $c+b \in A$. Этим доказано неравенство: $(A-B)+B \leqslant A$. Покажем, что $(A-B)+B \geqslant A$. Действительно, пусть $a \in A$, тогда $a=(a-b^*)+b^*$ и $a \in(A-B)+B$. Отсюда следует справедливость g).

2. Множество всех комплексов $\tilde{Y}$ обладает не всеми свойствами линейного множества, так например, из $X'+A=X''+A$, вообще говоря, не следует $X'=X''$; чтобы устранить это, введем понятие конечного комплекса, а именно: комплекс A будем называть конечным, если, каков бы ни был элемент $a_0 \in Y$, $a_0>0$, A может принадлежать не более конечного числа элементов вида $\{n a_0\}$ $(n=1,2, \ldots)$. В этом случае будем писать $A<+\infty$.

Множество конечных комплексов A, принадлежащих $\tilde{Y}$, обозначим через $\tilde{Y}_+$.

Лемма 3.

a) *Если* $A, B<+\infty$, *то* $A+B<+\infty$.
b) *Если* $A<+\infty$, *то и* $\lambda A<+\infty$ $(\lambda \geqslant 0)$.
c) *Если* $A<+\infty$ *и* $A>B$, *то* $B<+\infty$ *и* $A-B<+\infty$.

d) *Если* $A_0 < +\infty$ *и* A_0 — *верхняя граница множества* $\{A\}$, *то* $\sup A < +\infty$.

e) *Если* $A < +\infty$ *и* $B > 0$, *то* $A + B > A$.

f) *Если* $A, X', X'' < +\infty$ *и* $X' + A = X'' + A$, *то* $X' = X''$.

g) *Если* $A < +\infty$ *и* $A \geqslant B + C$, *то* $A - (B + C) = (A - B) - C$.

Наметим доказательства a) и f).

a) Предположим противное, тогда существует $c_0 > 0$, $a_n \in A$ и $b_n \in B$ такие, что $nc_0 \in A + B$ и $a_n + b_n = nc_0$ $(n = 1, 2 \ldots)$. Так как $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{n} a_n + \frac{1}{n} b_n\right) = c_0 > 0$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{n} a_n + \frac{1}{n} b_n\right) \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{n} a_n\right) + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{n} b_n\right)$, то по крайней мере один из верхних пределов: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{n} a_n\right)$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{n} b_n\right)$ больше нуля; пусть например $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{n} a_n\right) = a_0 > 0$, в таком случае $\sup \left(\frac{1}{n} a_n, \frac{1}{n+1} a_{n+1}, \ldots\right) \geqslant a_0$ и $\sup \left(a_n, \frac{n}{n+1} a_{n+1}, \ldots\right) \geqslant na_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, но $\sup \left(a_n, \frac{n}{n+1} a_{n+1}, \ldots\right) \in A$ и следовательно $na_0 \in A$, что невозможно.

f). Прежде всего можно показать, что

$$\sup (X', X'') + A = X' + A = X'' + A.$$

Если $X' \neq X''$, то $\sup (X', X'')$ больше, например X', тогда по лемме 2, g) $[\sup (X', X'') - X'] + X' = \sup (X', X'')$ и $[\sup (X', X'') - X'] + X' + A = X' + A$, что невозможно [по e)].

Лемма 4. *Множество конечных комплексов* $\overline{Y}_+$ *изоморфно совокупности положительных (включая нуль) элементов некоторого линейного полуупорядоченного пространства типа* K_5.

Рассмотрим множество $\overline{Y} = \{(A, B)\}$ возможных пар элементов из $\overline{Y}_+$. Положим $(A, B) > 0$, если $A > B$; $(A, B) + (C, D) = (A + C, B + D)$; $\lambda (A, B) = (\lambda A, \lambda B)$ при $\lambda \geqslant 0$ и $\lambda (A, B) = (-\lambda B, -\lambda A)$ при $\lambda < 0$. Отсюда следует: $(A, B) - (C, D) = (A + D, B + C)$; $(A, B) > (C, D)$, если $A + D > B + C$; $(A, B) = (C, D)$, если $A + D = B + C$; $(A, B) = 0$, если $A = B$.

Множество $\overline{Y} = \{(A, B)\}$ есть линейное множество. Действительно, в $\overline{Y}$ выполняются нижеследующие семь условий, характеризующие линейное множество:

1. $(A, B) + (C, D) = (C, D) + (A, B)$.
2. $[(A, B) + (C, D)] + (E, F) = (A, B) + [(C, D) + (E, F)]$.
3. Из $(C, D) + (A, B) = (C', D') + (A, B)$ следует $(C, D) = (C', D')$.
4. $\lambda [(A, B) + (C, D)] = \lambda (A, B) + \lambda (C, D)$.
5. $(\lambda_1 + \lambda_2) (A, B) = \lambda_1 (A, B) = \lambda_2 (A, B)$.
6. $\lambda_1 [\lambda_2 (A, B)] = \lambda_1 \lambda_2 (A, B)$.
7. $1 \cdot (A, B) = (A, B)$.

Покажем например 3). Если $(C, D) + (A, B) = (C', D') + (A, B)$, то $(C + A, D + B) = (C' + A, D' + B)$ и $C + A + B + D' = D + B + A + C'$ или $(C + D') + (A + B) = (D + C') + (A + B)$; применяя лемму 3, f), заключаем $C + D' = D + C'$, т. е.

$$(C, D) = (C', D').$$

В множестве $\overline{Y}$ выполнены также аксиомы I—V линейного полуупорядоченного пространства, а именно:

I. Если $(A, B) > 0$, то невозможно $(A, B) = 0$.
II. Если $(A, B) > 0$ и $(C, D) > 0$, то $(A, B) + (C, D) > 0$.
III. Для любого (A, B) найдется (C, D) такое, что $(C, D) > 0$ и $(C, D) - (A, B) > 0$.
IV. Если $\lambda > 0$ и $(A, B) > 0$, то $\lambda (A, B) > 0$.
V. Всякое ограниченное сверху множество E имеет точную верхнюю границу, $\sup E$.

Аксиомы I — IV проверяются без труда. Пусть $E = \{(X_\xi, Y_\xi)\}_{\xi<\vartheta}$ множество элементов из $\overline{Y}$ и (A, B) — верхняя граница E, тогда

$$\sup_{\xi<\vartheta} E = (A, B + \inf_{\xi<\vartheta} \{(A + Y_\xi) - (B + X_\xi)\}. \qquad (*)$$

Можно показать, что множество $\overline{Y}_+$ изоморфно совокупности положительных элементов из $\overline{Y}$ и, так как по определению верхней границы $(A + Y_\xi) \geqslant (B + X_\xi)$, то $\inf_{\xi<\vartheta} \{(A + Y_\xi) - (B + X_\xi)\}$ имеет смысл. Справедливость равенства (*) вытекает из следующих неравенств:

$$A + Y_\xi \geqslant B + X_\xi + \inf_{\xi<\vartheta} \{A + Y_\xi) - (B + X_\xi)\},$$

иначе говоря,

$$\sup_{\xi<\vartheta} E \geqslant (X_\xi, Y_\xi).$$

С другой стороны, пусть (C, D) — произвольная верхняя граница E, помощью леммы 3, g) можно показать, что

$$(C, D) \geqslant (C, D + \inf_{\xi<\vartheta} \{(C + Y_\xi) - (D + X_\xi)\}) =$$
$$= (A, B + \inf_{\xi<\vartheta} \{(A + Y_\xi) - (B + X_\xi)\},$$

т. е. $(C, D) \geqslant \sup_{\xi<\vartheta} E$. Таким образом аксиома V также выполняется в $\overline{Y}$ и имеет место

Теорема 1. *$\overline{Y}$ есть линейное полуупорядоченное пространство типа K_5.*

Пространство, образованное из Y указанным выше процессом, назовем **расширением** пространства Y. Термин «расширение» оправдывается следующей теоремой:

Теорема 2. *Всякое пространство содержится в своем расширении.*

Назовем комплекс **ограниченным**, если составляющее его множество элементов из Y ограничено. Совокупность $\{(A, B)\}$ элементов из $\overline{Y}$, где A и B — ограниченные комплексы, изоморфна пространству Y.

В частности, если всякий конечный комплекс пространства Y ограничен, Y изоморфно $\overline{Y}$.

Теорема 3. *Расширение расширенного пространства ему изоморфно.*

3. Пусть Y — пространство типа K_5 и $\overline{Y}$ — его расширение. Всякую последовательность $y_n \in Y$ можно рассматривать как последовательность элементов пространства $\overline{Y}$ (в силу теоремы 2); условимся говорить, что последовательность $\{y_n\}$ **расширенно** (o)-**сходится** в Y, если она (o)-сходится в $\overline{Y}$. Очевидно (o)-сходимость есть частный случай расширенной (o)-сходимости. Аналогично вводится понятие расширенной (*)-**сходимости**. Расширенные сходимости обладают многими свойствами обычных сходимостей.

4. Укажем расширения некоторых конкретных пространств.

Теорема 4. a) *Расширение пространств*: $\tilde{M}$, L^p *и* S *изоморфны пространству* S.

b) *Расширения пространств* m, l^p *и* s *изоморфны пространству* s.

В заключение заметим, что расширенное пространство может быть определено как пространство, удовлетворяющее следующему условию: если $y_n \in Y$ и $\inf(|y_i|, |y_j|)=0$ при $i \neq j$, то

$$\sup_n \{y_n\} < +\infty .$$

Институт математики.
Ленинградский государственный университет.

Поступило
19 VIII 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Kantorovich, Rec. Math., 2 (44), 1.