Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XXI, № 1—2

МАТЕМАТИКА

С. ФИНИКОВ

ИЗГИБАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ С ВЫТЯЖКОЙ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ЛИНИЙ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 1 VIII 1938)

1. По определению поверхность S налагается на S' с вытяжкой линий семейства ς, если между точками обеих поверхностей можно установить взаимно-однозначное соответствие так, чтобы линии σ, ортогональные к линиям ς, оставались ортогональными и сохраняли свою длину. Мы будем называть сеть линий ς, σ основанием растяжения. Как известно, во всяком точечном взаимно-однозначном соответствии между поверхностями S и S' существует сеть линий, равных своим соответствующим; они определяются из уравнения $ds^2 = ds_1^2$. Нетрудно заметить, что в соответствии наложимости с вытяжкой на основании ς, σ оба семейства сети равных линий совпадают с линиями σ. Обратно, всякое соответствие с совпадающими семействами сети равных линий есть соответствие наложимости с вытяжкой. Действительно, из равенства линейных элементов

$$E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2 = E_1\, du^2 + 2F_1\, du\, dv + G_1\, dv^2$$

следует при условии, что оба семейства равных линий совпадают с линиями $v = \text{const}$,

$$E = E_1, \ \ F = F_1 .$$

Если $F = 0$, то и $F_1 = 0$, т. е. линии u, v образуют основание растяжения ς, σ поверхностей S, S'.

2. С другой стороны, каковы бы ни были две поверхности S и S' и семейство линий ς на первой из них, можно наложить S на S' с вытяжкой линий ς. Отнесем поверхность S к сети линий ς и их ортогональных траекторий σ; пусть

$$ds^2 = A\, d\alpha^2 + B\, d\beta^2 \tag{1}$$

есть ее линейный элемент. Если $ds_1^2 = E_1 du^2 + 2F_1 du\, dv + G_1 dv^2$ — линейный элемент поверхности S', отнесенной к произвольным параметрам u, v, то проблема наложимости сводится к определению функций $\alpha = \alpha\ (u, v)$, $\beta = \beta\ (u, v)$ и B_1 так, чтобы

$$E_1 du^2 + 2F_1\, du\, dv + G_1\, dv^2 = A d\alpha^2 + B_1 d\beta^2, \tag{2}$$

откуда сейчас же получается система

$$A\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2+B_1\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2=E_1,\ A\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2+B_1\left(\frac{\partial\beta}{\partial v}\right)^2=G_1,$$
$$A\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v}+B_1\frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v}=F_1, \tag{3}$$

которая определяет α, β, B_1 с двумя произвольными функциями одного аргумента. Заметим, что уравнение (2) допускает очевидно замену β и B_1 на

$$\overline{\beta}=f(\beta),\ \overline{B_1}=B_1 f'^{-2}(\beta). \tag{4}$$

Следовательно с каждой системой линий α, β связано ∞ различных способов наложимости S на S'.

3. Если ς — семейство геодезически-параллельных линий, то σ — геодезические и соответствующие им линии σ' на S' тоже геодезические.

Обратно, если задать S и S' и на каждой из них семейство геодезически-параллельных линий ς или ς', то мы установим произвольное взаимно-однозначное соответствие между геодезическими σ и σ', ортогональными соответственно к ς или ς', и определим на каждой паре соответствующих геодезических σ, σ' точечное соответствие, сохраняющее их длины и переводящее одну из линий ς в соответствующую ей линию ς'. Все остальные линии ς будут переходить в соответствующие им линии ς' и поверхность S будет налагаться на S' с вытяжкой линий ς.

4. Более узкая проблема получится, если рассмотреть соответствие наложимости с вытяжкой линий ς, установленное между точками двух кусков поверхностей S, S', ограниченных соответственно линиями L, L', так, что эти линии соответствуют с сохранением длины.

Каково бы ни было соответствие наложимости поверхностей S, S' с вытяжкой линий ς, вообще говоря, можно определить на S и S' два куска $\sum$ и $\sum'$ так, чтобы их контуры L, L' соответствовали друг другу с сохранением длины. Отнесем обе поверхности к основанию растяжения ς, σ и пусть

$$ds^2=Ad\alpha^2+Bd\beta^2,\ ds_1^2=Ad\alpha^2+B_1 d\beta^2 \tag{5}$$

суть их линейные элементы. Приравнивая их, мы получим, если исключить решение $\beta=\text{const}$,

$$B=B_1. \tag{6}$$

Если ни B, ни B_1 не содержат α, то линии ς и ς' — геодезические, наша проблема невозможна.

Если уравнение (6) допускает решения $\alpha=\varphi(\beta)$, то они определяют на S и S' линии L, L', которые соответствуют друг другу с сохранением длины. Если например

$$\alpha=\varphi_1(\beta),\quad \alpha=\varphi_2(\beta) \tag{7}$$

суть два решения уравнения (6), то куски $\sum$, $\sum'$ могуть быть ограничены контурами, состоящими из двух линий σ, например $\beta=\beta_1$ и $\beta=\beta_2$, и из двух дуг кривых (7), вырезанных выбранными линиями σ.

5. Рассмотрим теперь изгибание заданного куска $\sum$ поверхности S, ограниченного контуром L, с вытяжкой заданных линий ς и сохранением длины соответствующих дуг L.

Какова бы ни была поверхность S', система (3) определит сеть линий $\alpha=\text{const}$, $\beta=\text{const}$, которые составят основание растяжения ς', σ' в наложимости S на S'.

Допустим, что L — уникурсальная линия, определенная на S в криволинейных координатах α, β уравнениями

$$\alpha=\varphi(t),\quad \beta=\psi(t), \tag{8}$$

где t — независимое переменное на L. Внося выражение (8) в формулы (5), мы получим условие сохранения длины на L в виде уравнения (6).

Мы видели, что система (3) допускает замену переменных вида (4). Пусть B_1 — решение системы (3), соответствующее каким-то решениям α, β той же системы; B_1 очевидно — функция от u, v или, что то же, от α, β. На линии (8) B_1 — определенная функция от t. Если она отличается от B, то мы введем новое решение $\bar{\beta} = f(\beta)$, определяемое уравнением

$$f'^2(\beta) = \frac{B_1}{B},$$

которое задано на линии (8), но очевидно определяет $\bar{\beta} = f(\beta)$ на всей поверхности S. Функция $\bar{B}_1$, которая соответствует этому решению $\bar{\beta}$, на линии (8) будет равна B, т. е. функции α, β определяют наложение с вытяжкой куска $\sum$ поверхности S на соответствующий кусок $\sum'$ произвольной поверхности S' с основанием растяжения ς, σ.

6. Можно думать, что замкнутая поверхность повсюду положительной кривизны допускает, оставаясь замкнутой, изгибание с вытяжкой, даже, если наложить добавочное условие сохранения длин, кроме линий σ, еще на некоторых линиях L. Я полагаю однако, что для каждой замкнутой поверхности S существует известный предел изгибания, т. е. среди всех замкнутых поверхностей S', налагающихся на S с вытяжкой линий ς, существует одна поверхность $\bar{S}'$ наибольшего объема. Отыскание такой поверхности представляет интересную, но трудную задачу.

Поступило
1 VIII 1938.