Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 9

МАТЕМАТИКА

В. С. ФЕДОРОВ

О ПОЛИНОМАХ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 14 VII 1938)

Пусть $f(z)$ есть полином степени n. Положим

$$W = f(z).$$

Если z описывает какую-либо открытую выпуклую и ограниченную область D, то точка W описывает некоторую римановскую поверхность. Обозначаем через $S(D)$ всю площадь этой поверхности и через $|D|$ — площадь D. Пусть наконец z_0 — какая-нибудь точка, расположенная внутри или на границе области D. Автор доказывает следующие теоремы:

I. Для всех полиномов степени $n\,(n \geqslant 1)$ имеем:

$$\frac{S(D)}{|D|} \geqslant \frac{|f'(z_0)|^2}{\varphi(n)},$$

где всегда можно взять $\varphi(n) = 2^{2n-2} \cdot n^{2n-1} \cdot (2n-1)$.

II. Можно положить $\varphi(n) = n \cdot (2n-1)$, если нули производной полинома $f(z)$ расположены вне некоторого круга радиуса R, в то время как область D расположена в концентрическом круге радиуса $\frac{R}{3}$.

III. Рассмотрим семейство полиномов $f(z)$ таких, для которых

$$f'(z) = A \cdot (z-\alpha_1)^p \cdot (z-\alpha_2)^p \ldots (z-\alpha_k)^p,$$

где $k+1 \leqslant N$, N — постоянная, одна и та же для всех полиномов этого семейства; $A, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — какие угодно комплексные числа и p — какое угодно целое положительное число.

Для этих полиномов можно взять $\varphi(n) = 2a^2 \cdot n^2$, где

$$a = 2^{N-1} \cdot N^{N-1}.$$

IV. Если область D — внутренность какого-нибудь круга, то можно взять $\varphi(n) = n^2$ (для любого полинома степени n).

V. Пусть D — связная область, ограниченная какой-нибудь границей F (безразлично какой: жордановой или канторовой). Обозначим через $\mathfrak{R}$ отношение

$$\mathfrak{R} = \frac{\iint\limits_D |P(z)|^2 d\sigma}{|P(z^*)|^2},$$

где $P(z)$—какой-нибудь многочлен степени n и где z^*—произвольная точка границы F.

1) Если D есть односвязная область, ограниченная простым замкнутым контуром C, обладающим всюду непрерывными касательной и кривизной, мы имеем:

$$\mathfrak{R} > \frac{K}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где K—положительное постоянное, зависящее от контура C.

2) Существует простой замкнутый контур C, имеющий всюду непрерывную касательную и кривизну за исключением только одной точки z_0 контура C, и такой, что неравенство

$$\mathfrak{R} < K \cdot \frac{\theta^n}{n}$$

будет удовлетворено для бесчисленного множества значений $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_4 < \ldots$ числа n, где K и θ—некоторые положительные постоянные, $\theta < 1$.

3) Какова бы ни была связная область D, ограниченная какой-нибудь границей F (жордановой или канторовой), мы заведомо имеем неравенство:

$$\mathfrak{R} > K \cdot \frac{\theta^n}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где K и θ—положительные постоянные, выбранные надлежащим образом, $\theta < 1$.

Пусть $L(d)$—длина кривой, которую описывает точка $W = f(z)$, когда точка z описывает какой-нибудь прямолинейный отрезок d с началом в некоторой точке z_0.

Автор доказывает теоремы:

VI. Для всякого полинома $f(z)$ степени n имеем:

$$L(d) \geqslant \frac{|f'(z_0)| \cdot |d|}{\psi(n)},$$

где $|d|$—длина отрезка d и где можно всегда взять

$$\psi(n) = n^n \cdot 2^{n-1}.$$

VII. Если нули производной полинома $f(z)$ расположены вне круга $|z - z_0| < d$, тогда можем взять

$$\psi(n) = n.$$

VIII. Для семейства полиномов, рассмотренных в теореме III, можно взять

$$\psi(n) = 2^{N-1} \cdot N^{N-1} \cdot n.$$

Поступило
13 VII 1938.