Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 2—3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Н. МАЛКИН

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТЕПЛА В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

(Представлено академиком А. Н. Крыловым 25 IV 1938)

Эту задачу для случая плоскопараллельной среды решают довольно сложно [методами «of Wave-trains» и контурных интегралов, Robertson (1) и С. С. Ковнер (2)]. Акад. А. Н. Крылов (3) для трехслойного цилиндра пользуется обычным методом Фурье, но, чтобы избежать определения весов фундаментальных функций, применяет далее метод наименьших квадратов. А. Н. Тихонов (4) для плоской и сферической среды ограничивается оценкой близости искомого решения к стационарному*. Между тем при помощи регуляризирующей подстановки (5) особенности на внутренних границах между слоями могут быть уничтожены, а следовательно, во всех указанных случаях веса могут быть найдены без затруднения, и задача весьма просто решается поэтому методом Фурье.

Взяв обычное уравнение теплопроводности

$$K\delta\frac{\partial v}{\partial t}=\operatorname{div}(\eta\operatorname{grad}v), \tag{1}$$

где v, K, δ и η обозначают температуру, теплоемкость, плотность и теплопроводность среды, предположим, что эта среда разбита на ряд однородных слоев поверхностями, на которых остается постоянной одна из криволинейных координат q_1. Предположим для простоты, что температура v зависит лишь от одной координаты q_1 (хотя задача также решается и в общем случае), и, положив $v=T(t)\,Q(q_1)$ и затем $\frac{T'}{T}=-\lambda^2$, приведем (1) к виду:

$$\frac{d}{dq_1}\eta\frac{A_2A_3}{A_1}\frac{dQ}{dq_1}=-K\delta A_1A_2A_3\lambda^2Q \tag{2}$$

(где A_1, A_2, A_3 — коэффициенты выражения $ds^2=A_1^2dq_1^2+A_2^2dq_2^2+A_3^2dq_3^2$, квадрата дифференциала дуги).

Решив эти уравнения для каждого слоя в отдельности и соединив полученные решения** в одно при помощи однородных пограничных условий либо обычного типа:

$$Q \text{ и } \eta\frac{dQ}{A_1dq_1} \text{ непрерывны на границе двух слоев,} \tag{3}$$

* Точное решение дается им лишь для однородной (K, δ, η постоянны) среды.

** Этими решениями будут для плоских слоев тригонометрические, для цилиндра и сферы бесселевы, для эллипсоида более сложные функции.

либо с теплоотдачей, как у А. Н. Крылова, и $\eta \frac{dQ}{A_1 dq_1} = bQ$ на внешних границах (так как всегда можно привести задачу к условию, что во внешней среде температура равна нулю), легко проверить, что полученные фундаментальные функции будут взаимно ортогональны с прерывным весом $K\delta\, A_1 A_2 A_3$:

$$\int K\delta\, A_1\, A_2\, A_3\, Q_m\, Q_n\, dq_1 = 0, \tag{4}$$

где интеграл распространен по всему промежутку изменения q_1 и Q_m и Q_n суть решения, отвечающие λ_m^2 и λ_n^2. Для этого нужно составить интеграл от известного вида комбинации двух выражений типа (2) и интегрировать по всему промежутку при условиях (3) или разбить интеграл на части при условиях с теплоотдачей.

Для плоскопараллельной, цилиндрической и сферической системы координат произведения $A_1 A_2 A_3$ равны соответственно 1, r, $r^2 \sin\varphi$, т. е. веса будут $K\delta$, $K\delta r$ и $K\delta r^2$; следовательно, множители $p(r)$, $q(r)$, $s(r)$ формул (31) Крылова равны одной и той же прерывной величине $K\delta r$.

Наиболее трудная часть работы — вычисление корней характеристического определителя $\Delta(\lambda) = 0$ — может быть выполнена для случая цилиндрического кабеля, если вместо определителя рассмотреть приводящие к нему уравнения.

Взяв частные решения [ср. (20) А. Н. Крылова]

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= AI_0\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_1}}\, r\right) && = AI_1, \\ v_2 &= CI_0\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}}\, r\right) + DN_0\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}}\, r\right) && = CI_2 + DN_2, \\ v_3 &= EI_0\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}}\, r\right) + FN_0\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}}\, r\right) && = EI_3 + FN_3 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(куда входят функции Бесселя и Неймана только нулевого порядка, и поэтому значок нуль отброшен для сокращения в самых правых частях) и замечая, что для меди $p_2 = \sqrt{K_2 \delta_2 \eta_2}$ равно согласно Hütte примерно 50, а p_1 и p_3 около 0.2, можно, следуя указанию А. Н. Крылова (3), пренебречь отношениями $\frac{p_1}{p_2}$ и $\frac{p_3}{p_2}$, и тогда дифференциальные условия типа (3) (которые, очевидно, соблюдаются и при наличии теплоотдачи):

$$\eta_2 \frac{dQ_2}{dr} = \eta_1 \frac{dQ_1}{dr} \quad \text{при } r = a \text{ и } \eta_2 \frac{dQ_2}{dr} = \eta_3 \frac{dQ_3}{dr} \quad \text{при } r = b$$

примут вид:

$$CI'_{2,a} + DN'_{2,a} = 0;\; CI'_{2,b} + DN'_{2,b} = 0. \tag{6}$$

Условие совместности их будет

$$I'_{2,a} N'_{2,b} - I'_{2,b} N'_{2,a} = I_1\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}}\, a\right) N_1\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}}\, b\right) - I_1\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}}\, b\right) N_1\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}}\, a\right) = 0.$$

Пользуясь асимптотическими выражениями бесселевых функций:

$$I_0(x) \backsim -N_1(x) \backsim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$I_1(x) \backsim N_0(x) \backsim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

легко найти корни этого уравнения

$$\lambda_n \backsim \frac{\pi \sqrt{k_2}}{b - a}\, n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{7}$$

Впрочем первые корни этого уравнения табулированы (6).

После этого легко выразить все коэффициенты D, A, E и F через C, что и послужит решением задачи в первом приближении.

Второе приближение, если оно понадобится, сведется к решению системы пяти линейных уравнений с пятью неизвестными.

Поступило
13 V 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Robertson, Phil. Mag., VII, 950 (1933); там же ссылка на работы G. Green'a. [2] С. С. Ковнер, ИМЕН, серия географ., № 3 (1937); там же ссылка на предыдущую работу автора. [3] А. Н. Крылов, ИМЕН, серия матем., № 1 (1937). [4] А.Н. Тихонов, ИМЕН, серия географ., № 3 (1937). [5] В. А. Стеклов, Основные задачи матем. физики, ч. I, стр. 60 (1922). [6] Янке Емде, Таблиці функцій.