Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 2—3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. С. ИГНАТОВСКИЙ, член-корреспондент Академии Наук СССР

К ТЕОРИИ РЕШЕТКИ. I

Мы опять рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

которое справедливо в полупространстве, справа от плоскости ZY (x положительно). Мы имеем здесь в виду плоскую задачу, т. е. независимость от координаты Z.

Как интегралы получим аналогично (9) нашей работы [1]:

$$u(x, y, t)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_x^{ct} d\tau_1 \int\limits_{-\sqrt{\tau_1^2-x^2}}^{\sqrt{\tau_1^2-x^2}} \frac{H(y-s,\ t-\tau)}{\sqrt{\tau_1^2-x^2-s^2}}\,ds;\quad \tau_1=c\tau, \tag{2}$$

если нам дано $H(y, t)=\frac{\partial u}{\partial x}_{x=0}$ на плоскости YZ, и из (14) нашей работы [2] имеем:

$$u(x, y, t)=-\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_x^{ct} d\tau_1 \int\limits_{-\sqrt{\tau_1^2-x^2}}^{\sqrt{\tau_1^2-x^2}} \frac{N(y-s,\ t-\tau)}{\sqrt{\tau_1^2-x^2-s^2}}\,ds;\quad \tau_1=c\tau, \tag{3}$$

если даны $u(o, y, t)=N(y, t)$, также на плоскости YZ.

В дальнейшем мы предполагаем начальные условия $G(x, y)=$ $=F(x, y)=0$.

Мы будем иметь дело с электромагнитными явлениями (все выражено в абсолютной электромагнитной мере) и полагаем, что плоскость YZ состоит из абсолютно отражающего и бесконечно тонкого экрана [см. также конец моей работы [3]].

Мне давно уже было известно, что касательная (к экрану, т. е. к плоскости YZ) составляющая в с е й магнитной силы равна в отверстии, т. е. там, где нет экрана, соответственной компоненте падающей волны, совершенно независимо от связи со временем.

Это положение было напечатано по-русски в 1924 г. [4] и по-немецки в 1925 г. [5].

Как падающую волну примем плоскую волну, перпендикулярную к экрану с электрической силой, параллельной оси Z.

Мы предполагаем, наконец, что экран имеет бесконечно много бесконечно длинных щелей шириной в $2b$ и сам состоит из полос шириной в $2(a-b)$

Таким образом мы имеем решетку бесконечно длинную и бесконечно широкую с постоянной $2a$.

Вследствие вышесказанного положения нам известно $\frac{\partial u}{\partial x}$ внутри щели, и так как мы приняли чисто периодическое состояние по времени, то аналогично нашей работе ([3]) вместо (1), (2) и (3) получим следующие выражения, причем мы откинули фактор $e^{i\omega t}$:

$$\varkappa^2 u(x, y)+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{4}$$

$$u(x, y)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_x^\infty e^{-i\varkappa\tau_1}d\tau_1\int\limits_{-\sqrt{\tau_1^2-x^2}}^{\sqrt{\tau_1^2-x^2}}\frac{H_0(y-s)\,ds}{\sqrt{\tau_1^2-x^2-s^2}}, \tag{5}$$

и

$$u(x, y)=-\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_x^\infty e^{-i\varkappa\tau_1}d\tau_1\int\limits_{-\sqrt{\tau_1^2-x^2}}^{\sqrt{\tau_1^2-x^2}}\frac{N_0(y-s)\,ds}{\sqrt{\tau_1^2-x^2-s^2}}. \tag{6}$$

При этом обозначает

$$\varkappa=\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi}{cT}=\frac{2\pi}{\lambda}\ (\lambda\text{—длина волны в пустоте}), \tag{7}$$

см. также нашу работу ([6]), где между прочим дано точное решение для проволочной решетки.

Для падающей волны мы примем

$$u_0(x, y)=e^{-i\varkappa x}. \tag{8}$$

Вследствие вышеуказанного положения из (8) имеем внутри щели шириной $2b$:

$$H_0(y)=-i\varkappa, \tag{9}$$

а на полосе $N_0(y)=0$.

Все здесь будет периодично относительно оси Y, с периодом, равным $2a$, т. е. постоянной решетки. Начало координат мы положим в середине щели.

Мы здесь имеем смешанную проблему, так как на полосе $N_0(y)=0$, а внутри щели нам $N_0(y)$ неизвестно. С другой стороны, $H_0(y)$ определено из (9) внутри щели, но неизвестно на полосе.

Мы переведем в (5) H_0 под знак первого интеграла и получим вместо (5):

$$u(x, y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty H_0(y-s)\,Q_0(\varkappa\sqrt{x^2+s^2})\,ds+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty H_0(y+s)\,Q_0(\varkappa\sqrt{x^2+s^2})\,ds, \tag{10}$$

где $Q_0(x)$ обозначает функцию Ганкеля второго рода от аргумента x, помноженную на $\frac{i\pi}{2}$.

Вследствие упомянутой периодичности из (10) следует

$$u(x, y)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^\infty B_n\cos\frac{\pi n y}{a}\int\limits_0^\infty\cos\frac{\pi n s}{a}\,Q_0(\varkappa\sqrt{x^2+s^2})\,ds. \tag{11}$$

Отсюда получим на основании (29) и (30) моей работы [7]:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\frac{\pi n s}{a}\cdot Q_0\left(\varkappa\sqrt{x^2+s^2}\right)ds=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{ie^{-ix\sqrt{\varkappa^2-\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2}}}{\sqrt{\varkappa^2-\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2}}=\beta_n e^{-ix\sqrt{\varkappa^2-\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2}}; & \varkappa>\dfrac{\pi n}{a} \\ -\dfrac{e^{-x\sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2-\varkappa^2}}}{\sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2-\varkappa^2}}=\beta_n e^{-x\sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2-\varkappa^2}}; & \varkappa<\dfrac{\pi n}{a} \end{array}\right\}. \tag{12}$$

Это мы должны вставить в (11). Далее следует из (12) известное значение:

$$\beta_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\frac{\pi n s}{a} Q_0(\varkappa s)\,ds, \tag{13}$$

и наконец

$$H_0(y)=\sum_{n=0}^\infty B_n\cos\frac{\pi n y}{a}, \tag{14}$$

$$N_0(y)=\sum_{n=0}^\infty B_n\beta_n\cos\frac{\pi n y}{a}. \tag{15}$$

Вследствие (9) получим:

$$\left.\begin{array}{l} B_0=-\dfrac{i\varkappa b}{a}+C_0 \\ B_n=-\dfrac{2i\varkappa}{\pi n}\sin\dfrac{\pi n b}{a}+C_n \end{array}\right\}, \tag{16}$$

причем

$$\left.\begin{array}{l} C_0=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_b^a H_0(y)\,dy \\ C_n=\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_b^a H_0(y)\cos\dfrac{\pi n y}{a}\,dy \end{array}\right\}. \tag{17}$$

Таким образом следует из (15)

$$N_0(y)=\left(-\frac{i\varkappa}{2}+C_0\right)\beta_0-\frac{2i\varkappa}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{\beta_n}{n}\sin\frac{\pi n b}{a}\cdot\cos\frac{\pi n y}{a}+\sum_{n=1}^\infty C_n\beta_n\cdot\cos\frac{\pi n y}{a}. \tag{18}$$

Теперь мы воспользуемся тем обстоятельством, что $N_0(y)=0$ на полосе. Тогда имеем из (18):

$$N_0(y)=\left(-\frac{i\varkappa}{2}+C_0\right)\frac{b}{a}\beta_0-\frac{2i\varkappa}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty\frac{\beta_n}{n^2}\sin^2\frac{\pi n b}{a}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{C_n\beta_n}{n}\sin\frac{\pi n b}{a}+$$

$$+\sum_{m=1}^\infty\cos\frac{\pi m y}{a}\left\{\left(-\frac{i\varkappa b}{a}+C_0\right)\frac{2\beta_0}{m\pi}\sin\frac{\pi m b}{a}-\right.$$

$$\left.-\frac{2i\varkappa}{\pi a}\sum_{n=1}^\infty\frac{\beta_n}{n}a_{n,m}\sin\frac{\pi n b}{a}+\frac{1}{a}\sum_{n=1}^\infty C_n\beta_n a_{n,m}\right\}, \tag{19}$$

где обозначено

$$a_{n,m}=\int_{-b}^{b}\cos\frac{\pi n y}{a}\cdot\cos\frac{\pi m y}{a}\,dy. \tag{20}$$

При этом в левой части (19) значение для $N_0(y)$ взято из (18). Из (19) совместно с (9) могут быть определены C_n.

Мы возьмем частный случай, а именно:

$$b = \frac{a}{2}, \tag{21}$$

т. е. ширина щели равна ширине полосы.

Мы здесь не можем повторять вычислений, скажем только, что мы **положили**

$$C_{2n+1} \cdot \beta_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} D + \frac{2i\varkappa(-1)^n}{\pi(2n+1)} \beta_{2n+1}. \tag{22}$$

Тогда окончательно получим для данного приближения:

$$\left.\begin{aligned} B_0\beta_0 &= \frac{\pi^3}{48} \cdot D \\ B_{2n+1} \cdot \beta_{2n+1} &= \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} D \\ B_{2n+2} \cdot \beta_{2n+2} &= -\frac{(-1)^{n+1}\pi}{2(2n+2)^2} D \end{aligned}\right\}. \tag{23}$$

Так как мы знаем значение $H_0(y)$ внутри щели на основании (9), то потому из (14) получим при $y=0$ соотношение:

$$-i\varkappa = D\left\{\frac{\pi^3}{48\beta_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3\beta_{2n+1}} - \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)^2\beta_{2n+2}}\right\}, \tag{24}$$

из которого определится постоянная D.

Для $y=a$ и $y=b$ (т. е. на краю щели) мы получаем из (15) значения нуль, как это и должно быть.

Для $y=0$ имеем:

$$N_0(0) = \frac{\pi^3}{16} D. \tag{25}$$

Если мы перейдем к предельному случаю, когда $\lambda \longrightarrow 0$ и таким образом все $\frac{1}{\beta_n} = -i\varkappa$, тогда из (24) получим $D = \frac{16}{\pi^3}$ и, следовательно, $N_0(0) = 1$ при $\lambda \longrightarrow 0$.

Принимая силу света нулевого спектра (т. е. непосредственно прошедшего света) за единицу, получим для интенсивностей:

$$\left.\begin{aligned} I_{2n+1} &= \left(\frac{24}{(2n+1)^3\pi^3}\right)^2 \\ I_{2n+2} &= \left(\frac{12}{(2n+2)^2\pi^2}\right)^2 \end{aligned}\right\}, \tag{26}$$

рассчитанных по квадрату электрической силы.

Так, например:

$$I_0 = 1; \quad I_1 = 0.5910; \quad I_2 = 0.0924; \quad I_3 = 0.0008; \quad I_4 = 0.0058.$$

В заключение упомянем еще о работах Г. Яффе ([8], [9]) и Э. Фишера ([10]).

Институт математики и механики.
Ленинградский государственный университет.

Поступило
7 V 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. С. Игнатовский, ДАН, XVIII, № 8, 511—515 (1938). [2] В. С. Игнатовский, ДАН, XV, № 2, 67—70 (1937). [3] В. С. Игнатовский, ДАН, XV, № 4, 163—165 (1937). [4] В. С. Игнатовский, ЖРФО, физ. часть, **56**, 613—621 (1924). [5] W. Ignatowsky, Ann. d. Phys., **77(4)**, 589—643 (1925), в особенности стр. 619. [6] W. Ignatowsky, Ann. d. Phys., **44(4)**, 369—436 (1914). [7] W. Ignatowsky, Arch. d. Math. u. Phys., III Reihe, **23**, 193—219 (1914); есть русский перевод (дополненный) в Извест. Ин-та фотограф. и фототехн., I, вып. III (1920). [8] G. Jaffé, Phys. ZS., XXII, 578 (1921). [9] G. Jaffé u. E. Fischer, Phys. ZS., XXX, 87 (1929). [10] E. Fischer, Math. Ann., **101**, 399 (1929).