Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 2—3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Н. В. ЗВОЛИНСКИЙ и П. М. РИЗ

КРУЧЕНИЕ РАСТЯНУТОГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО БРУСА

(Представлено академиком С. А. Чаплыгиным 9 V 1938)

Оставаясь в рамках линейной теории упругости, в которой пренебрегают квадратами и произведениями производных от перемещений, приходится рассматривать деформацию закручивания призмы независимо от ее растяжения. Напряженное состояние при одновременном действии обеих нагрузок получается наложением двух систем напряжений. Этот результат противоречит экспериментальным наблюдениям, и в настоящей статье мы ставим своей задачей найти влияние, которое оказывает наличие растягивающих (сжимающих) усилий на жесткость кручения призмы. Для достижения этой цели мы должны отказаться от линейной теории упругости.

Пусть a, b и c—координаты некоторой материальной точки тела в прямоугольной системе координат до деформации; x, y, z—координаты в той же системе после деформации. Пусть заданы перемещения u, v и w, которые можно рассматривать либо как функции первоначальных координат a, b, c, либо как функции окончательных координат x, y, z.

Введем в рассмотрение компоненты деформации, определяемые формулами следующего вида [1]:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right], \\ \varepsilon_{x} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Величины ε_{ii} связаны с удлинениями e_{ii} зависимостью

$$e_{ii} = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon_{ii}}}{\sqrt{1 - 2\varepsilon_{ii}}}. \tag{2}$$

Во втором приближении

$$e_{ii} = \varepsilon_{ii} + \frac{5}{2}\varepsilon_{ii}^2. \tag{3}$$

Чтобы определить напряжения, необходимо дать какой-то закон, связывающий удлинения и напряжения. Можно считать экспериментально установленным, что для перемещений конечных, но не превышающих некоторой малой величины (предела пропорциональности), главные напряжения σ_i связаны с главными удлинениями e_i следующей зависимостью:

$$\sigma_i = \lambda \sum_{\alpha=1}^{3} e_\alpha + 2 G e_i. \tag{4}$$

Отсюда может быть вычислена удельная работа деформации

$$\Phi = G\left\{\sum_{\alpha=1}^{3} e_\alpha^2 + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\sum_{\alpha=1}^{3} e_\alpha\right)^2\right\}. \tag{5}$$

Пользуясь формулой (3) и вводя инварианты тензора деформации:

$$I_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}; \quad I_2 = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} - \frac{1}{4}\left(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2\right);$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix},$$

напишем удельную работу деформации в следующем виде:

$$\Phi = G\frac{1-\nu}{1-2\nu} I_1^2 - 2GI_2 + lI_1^3 + mI_1I_2 + nI_3. \tag{6}$$

При сделанных нами предположениях о законе Гука

$$l = 3G\frac{1-\nu}{1-2\nu}; \quad m = -3G\frac{1-4\nu}{1-2\nu}; \quad n = 9G.$$

Формулы Мурнагана [2] позволяют определить напряжения, если известны коэффициенты в выражении энергии.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx} = \lambda I_1 + (3l + m - \lambda) I_1^2 + mI_2 + \left\{2G - (m + 2\lambda + 2G) I_1\right\}\varepsilon_{xx} + \\ + n\frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{xx}} - 4G\left[\varepsilon_{xx}^2 + \frac{1}{4}\left(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2\right)\right], \\ \sigma_{xy} = \left\{G - \left(\frac{m}{2} + \lambda + G\right) I_1\right\}\varepsilon_{xy} + 2n\frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{xy}} - \\ - 2G\left[\varepsilon_{xx}\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{xy} + \frac{1}{2}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Остальные компоненты напряжений определяются аналогично.

Предположим теперь, что u, v и w при одновременном действии крутящей пары, приложенной на конце бруса и равномерно распределенной по концевому сечению растягивающей силы, определяются формулами:

$$u = -\tau bc - \nu\alpha a; \quad v = \tau ac - \nu\alpha b; \quad w = \tau\varphi(a, b) + \alpha c. \tag{8}$$

Начало координат взято в центре тяжести одного из оснований призмы, τ—крутка, α—некоторая постоянная величина.

Из уравнений вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial a}\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{9}$$

Определяем $\frac{\partial u}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial z}$; $\frac{\partial v}{\partial x}$ и пр. в функциях от производных $\frac{\partial u}{\partial a}$; $\frac{\partial u}{\partial b}$ и пр.

Вставляя в формулы (1), получим выражения компонентов деформации ε_{ij} через координаты недеформированного состояния.

Выкладки здесь и всюду в дальнейшем проводим, отбрасывая все члены третьего порядка малости, а также члены второго порядка, содержащие квадраты τ *.

---

* Деформация кручения считается малой в классическом смысле.

Получаем:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= -\nu\alpha; \quad \varepsilon_{yy} = -\nu\alpha; \quad \varepsilon_{zz} = \alpha; \quad \varepsilon_{xy} = 0 \\ \varepsilon_{xz} &= \tau\left\{\varphi'_a(1-2\alpha+\nu\alpha) - b(1-\alpha+2\nu\alpha)\right\} \\ \varepsilon_{yz} &= \tau\left\{\varphi'_b(1-2\alpha+\nu\alpha) + a(1-\alpha+2\nu\alpha)\right\} \end{aligned}\right\}, \tag{10}$$

откуда по формуле (7)

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{zz} = 2\,G\alpha(1+\nu), \\ &\sigma_{xz} = G\tau\left(1+\frac{3}{2}\alpha+5\,\alpha\nu\right)\left\{\varphi'_a(1-2\alpha+\alpha\nu) - b(1-\alpha+2\,\alpha\nu)\right\} \\ &\sigma_{yz} = G\tau\left(1+\frac{3}{2}\alpha+5\,\alpha\nu\right)\left\{\varphi'_b(1-2\alpha+\alpha\nu) + a(1-\alpha+2\,\alpha\nu)\right\} \end{aligned}\right\}. \tag{11}$$

Легко видеть, что условия равновесия в отсутствие массовых сил выполняются, если

$$\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y} = 0,$$

что сводится к условию

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial a^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial b^2} = 0. \tag{12}$$

Условия отсутствия напряжений в боковой поверхности приводят к требованию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{db}{ds} - \frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{da}{ds} = (1-\alpha-\alpha\nu)\frac{d}{ds}\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right) \tag{13}$$

на контуре, ограничивающем сечение.

Отсюда видно, что функция φ отличается от функции $\bar{\varphi}$ для чистого кручения множителем $[1-\alpha-\alpha\nu]$.

Крутящий момент определяем по формуле:

$$\begin{gathered} M = \iint\left\{x\sigma_{yz} - y\sigma_{xz}\right\}dx\,dy = \\ = \iint\left\{(a+u)\sigma_{yz} - (b+v)\sigma_{xz}\right\}\left|\frac{D(x,y)}{D(a,b)}\right|_{z=\mathrm{const}} da\,db, \\ \iint\sigma_{xz}\,dx\,dy = \iint\sigma_{yz}\,dx\,dy = 0, \end{gathered} \tag{14}$$

так как начало координат лежит в центре тяжести сечения.

Проводя выкладки согласно формулам (11) и (13), находим:

$$M = G\,T_0\tau\left\{1+\frac{p}{G}\frac{1}{1+\nu}\left[\frac{J_p}{T_0} - \frac{3}{4} + \nu\right]\right\}, \tag{15}$$

где T_0—геометрическая жесткость на кручение нерастянутого стержня, J_p—полярный момент относительно оси кручения, а $p = 2\,G(1+\nu)\alpha$—напряжение от растягивающих сил. Отсюда получаем основной результат:

геометрическая жесткость на кручение растянутого (сжатого) стержня определяется формулой

$$T = T_0\left\{1+\frac{p}{G(1+\nu)}\left[\frac{J_p}{T_0} - \frac{3}{4} + \nu\right]\right\}. \tag{16}$$

Центральный аэрогидродинамический институт.
Москва.

Поступило
10 V 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Кокер и Файлон, Оптический метод исследования напряжений, стр. 165 (1936). [2] Murnaghan, Amer. Journ. of Math., LIX, № 2 (1937)