Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 2—3

МАТЕМАТИКА

С. Г. МИХЛИН

СВЕДЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ К ЭКВИВАЛЕНТНОМУ УРАВНЕНИЮ ФРЕДГОЛЬМА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 15 V 1938)

Нами было доказано (1), что всякий сингулярный оператор вида

$$TW = a(M)\,W(M) + \int\limits_E W(M_1)\frac{f(M;\,\theta_1,\dots\theta_{m-2},\,\varphi)}{R^m}\,d\tau_1{}^*, \tag{1}$$

где E — m-мерное евклидово пространство—можно представить в виде ряда, расположенного по степеням некоторых сингулярных операторов $U_1, U_2, \dots U_{m-2}, U_{m-1}$. Эти операторы имеют символы, равные соответственно $e^{2i\theta_1}, e^{2i\theta_2}, \dots e^{2i\theta_{m-2}}, e^{i\varphi}$ (1), и являются коммутативными и унитарными в пространстве L_2:

$$T = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{n_1 n_2 \dots n_{m-1}}(M)\,U_1^{n_1}\,U_2^{n_2}\,\dots\,U_{m-1}^{n_{m-1}}. \tag{2}$$

Заменив в (2) U_k их символами, получим символ оператора T.

Лемма. *Норма оператора T не превосходит максимума модуля его символа.*

Определим самосопряженные операторы $A_1, \dots A_{m-1}$ с помощью равенства:

$$U_k = e^{2\pi i A_k}. \tag{3}$$

Пусть

$$T = \sum_0^{\infty} b_{n_1 n_2 \dots n_{m-1}}(M)\,A_1^{n_1} A_2^{n_2} \dots A_{m-1}^{n_{m-1}} = F(M;\,A_1,\,A_2,\,\dots\,A_{m-1}). \tag{4}$$

Обозначим через $E_k(\lambda_k)$ разложение единицы, отвечающее оператору A_k. Тогда, как известно,

$$A_1^{n_1}\,A_2^{n_2}\,\dots\,A_{m-1}^{n_{m-1}}\,W = \int\limits_0^{1(m-1)} \lambda_1^{n_1}\,\lambda_2^{n_2} \dots \lambda_{m-1}^{n_{m-1}}\,dE_0 W, \tag{5}$$

где

$$dE_0 = dE_1(\lambda_1)\,dE_2(\lambda_2)\dots dE_{m-1}(\lambda_{m-1}).$$

В равенстве (5) соответствующая интегральная сумма сильно сходится к левой части равенства.

---

* Мы сохраняем обозначения заметки (1).

Умножая (5) на соответствующие коэффициенты и суммируя, найдем:

$$TW = \int_0^{1(m-1)} F(M; \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{m-1})\, dE_0 W. \qquad (6)$$

Отметим, что совокупность значений F совпадает с совокупностью значений символа оператора T.

Из (6) следует

$$\| TW \|^2 = \int_0^{1(m-1)} (F dE_0 W, TW),$$

откуда

$$\| TW \| \leqslant \max |F| \cdot \| W \|. \qquad (7)$$

Теорема. *Если символ оператора T не принимает значения нуль, сингулярное интегральное уравнение*

$$TW = f(M) \qquad (8)$$

эквивалентно некоторому уравнению Фредгольма. В уравнении (8) $f(M)$ есть сумма известной функции из L_2 и вполне непрерывного в L_2 оператора.

Эта теорема была нами доказана для $m = 2$ ([2]–[3]). Наше доказательство остается верным при произвольном m, если разложение (2) содержит степени только одного оператора. Допустим теперь, что наша теорема верна, когда разложение (2) содержит степени $m-2$ операторов, и докажем, что она верна и тогда, когда это разложение содержит степени $m-1$ оператора. Разложим T по степеням U_1:

$$T = \sum_{-\infty}^{+\infty} \rho_n (M; U_2, \ldots U_{m-1})\, U_1^n. \qquad (9)$$

Обозначим

$$T_n = \sum_{-n}^{+n} \rho_k U_1^k \qquad (10)$$

и положим

$$T = T_n + R_n. \qquad (11)$$

Возьмем n настолько большим, чтобы символ T_n не обращался в нуль. Уравнение (8) запишем в виде:

$$T_n W = f - R_n W = f_1. \qquad (12)$$

Будем пока рассматривать величину f_1, как известную. Разложим T_n на множители:

$$T_n = U_1^{-n} \prod_{k=1}^{2n} [\mu_k (M; U_2, \ldots U_{m-1})\, U_1 - \nu_k (M; U_2, \ldots U_{m-1})]. \qquad (13)$$

Равенство (13) верно с точностью до некоторого вполне непрерывного оператора. Уравнение (12) запишем в виде:

$$\prod_{k=1}^{2n} (\mu_k U_1 - \nu_k)\, W = U_1^n f_2 = f_3.$$

f_2 отличается от f_1 на вполне непрерывный оператор.

Положим

$$\prod_{k=1}^{2n-1} (\mu_k U_1 - \nu_k) W = V_1; \tag{14}$$

тогда

$$\mu_{2n} U_1 V_1 - \nu_{2n} V_1 = f_3. \tag{15}$$

Ни один из символов множителей произведения (13) не принимает значения нуль. Сохраняем для символов те же обозначения, что и для их операторов. Необходимо постоянно, чтобы либо $|\mu_{2n}| > |\nu_{2n}|$, либо $|\nu_{2n}| > |\mu_{2n}|$.

Пусть, например, $|\nu_{2n}| > |\mu_{2n}|$. Тогда символ ν_{2n} не принимает значения нуль. Положим

$$\nu_{2n} V_1 = V_0. \tag{16}$$

Рассматривая (16), как уравнение с неизвестной V_1, находим, что его можно свести к эквивалентному ему уравнению Фредгольма:

$$V_1 + tV_1 = \nu_{2n}^{-1} V_0 + t'V_0 \text{ *},$$

где t и t' — вполне непрерывные операторы. Подставив это в (15), получим:

$$V_0 - \mu_{2n} U_1 \nu_{2n}^{-1} V_0 = f_4 = -f_3 - \mu_{2n} U_1 (tV_1 - t'V_0). \tag{17}$$

Норма второго члена в левой части меньше единицы, и уравнение (17) можно решить последовательными приближениями. При этом мы рассматриваем правую часть как известную. Решив (17), заменим V_0 по формуле (16) и V_1 по формуле (14). Мы приходим таким образом к уравнению:

$$\prod_{k=1}^{2n-1} (\mu_k U_1 - \nu_k) W = f_5.$$

Полагаем

$$\prod_{k=1}^{2n-2} (\mu_k U_1 - \nu_k) W = V_2$$

и т. д. В конечном счете мы получим уравнение:

$$W + R_n T_n^{-1} W = \Phi, \tag{18}$$

где Φ есть сумма известной функции и вполне непрерывного оператора. При достаточно большом n имеем:

$$\| T_n^{-1} \| \leqslant \max \frac{1}{|T_n|} < \max \frac{2}{|T|},$$

а $\| R_n \|$ сколь угодно мала. Но тогда норму произведения $R_n T_n^{-1}$ можно при n достаточно большом сделать меньше единицы. Теперь уравнение (18) решается последовательными приближениями, и это приводит нас к уравнению Фредгольма, эквивалентному уравнению (8).

Для систем сингулярных уравнений имеет место аналогичная теорема.

---

* ν_{2n}^{-1} здесь означает сингулярный оператор, символ которого равен $\frac{1}{\nu_{2n}}$. В этом же смысле следует понимать обозначение T_n^{-1} в формуле (18) и ниже.

Если символический определитель системы не принимает значения нуль и число измерений пространства $m \geqslant 2$, то система сингулярных интегральных уравнений эквивалентна некоторой фредгольмовой системе.

Сейсмологический институт.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
16 V 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. Михлин, ДАН, XIX, № 5, 353 (1938). [2] С. Г. Михлин, ДАН, XV, № 8, 429—432 (1937). [3] С. Г. Михлин, Матем. сб., **3 (45)**, 1, 121—140 (1938).