Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 2—3

МАТЕМАТИКА

С. Д. РОССИНСКИЙ

ПЕРМАНЕНТНЫЕ ИЗОКЛИННЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ КОНГРУЭНЦИЙ

(Представлено академиком С. А. Чаплыгиным 9 V 1938)

§ 1. В настоящей заметке дается решение третьей из поставленных в моем предыдущем сообщении задач [1].

1. Случай луча конгруэнции C, ортогонального соответствующей касательной плоскости поверхности S. Поверхность S может быть произвольной поверхностью, обладающей главным основанием.

Точка входа луча в касательную плоскость определяется уравнениями:

$$F\left[1+\xi_u+\xi\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\eta\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right]+G\left[\eta_u+\xi\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}+\eta\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right]=0,$$

$$F\left[1+\eta_v+\eta\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}+\xi\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right]+E\left[\xi_v+\eta\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\xi\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right]=0,$$

где величины E, F, G, ξ, η имеют тот же смысл, что и в цитированном сообщении (ср. там § 2, п. 1).

Перманентная изоклинная система состоит из развертывающихся поверхностей конгруэнции C.

Полученная здесь конгруэнция тождественна с той, которая была найдена С. П. Финиковым в задаче изгибания конгруэнции с сохранением ее развертывающихся поверхностей [2].

Кроме этого действительного решения можно отметить также и некоторые мнимые. Это будут те случаи, когда поверхность S обладает главным основанием, содержащим одно или оба семейства линий нулевой длины (минимальных). В первом из этих случаев мнимая конгруэнция C вырождается в ∞^1 цилиндров, а во втором является также мнимой и обладает перманентной изоклинной системой, состоящей из линейчатых поверхностей, сферическое изображение которых образовано линиями нулевой длины.

2. Случай луча конгруэнции C, лежащего в соответствующей касательной плоскости поверхности S и притом параллельного касательной к линии главного основания. Поверхность S может быть произвольной поверхностью, обладающей главным основанием с одним семейством геодезических линий.

Конгруэнция C образована прямыми, параллельными касательным к геодезическим $u=\text{const}$ главного основания и отсекающими на касательных к линиям $v=\text{const}$ главного основания отрезки:

$$\xi = Ue^{\int\left[\frac{F}{E}\left\{ {12 \atop 2} \right\} - \frac{KG}{\left\{ {12 \atop 1} \right\}}\right] dv},$$

где U — произвольная функция от u, K — гауссова кривизна поверхности S, а E, F, G — коэффициенты ее линейного элемента.

Перманентная изоклинная система совпадает с системой главных линейчатых поверхностей конгруэнции C. Полученное решение содержится как частный случай в том, которое было найдено мной в задаче изгибания конгруэнции с сохранением ее главных линейчатых поверхностей при аналогичном расположении луча ([3]).

3. Случай луча конгруэнции C, совпадающего с касательной к линии одного семейства главного основания. Поверхность S может быть произвольной поверхностью, обладающей главным основанием.

Перманентная изоклинная система состоит из развертывающихся поверхностей конгруэнции C. Эта конгруэнция была найдена С. П. Финиковым в его указанной выше диссертации (см. гл. II, стр. 49).

§ 2. Случай луча конгруэнции C, отсекающего на соответствующих касательных к линиям главного основания конечные и отличные от нуля отрезки ξ и η.

Этот случай допускает три существенно различных решения.

1. Поверхность S может быть произвольной поверхностью, обладающей главным основанием.

Отрезки ξ и η находятся из уравнений:

$$q \equiv \xi\eta_u + \eta\sqrt{E} + \eta(\eta - \xi\cos\omega)\left\{ {12 \atop 1} \right\}\sqrt{\frac{E}{G}} = 0,$$

$$n \equiv \eta\xi_v + \xi\sqrt{G} + \xi(\xi - \eta\cos\omega)\left\{ {12 \atop 2} \right\}\sqrt{\frac{G}{E}} = 0,$$

где ω есть угол между координатными линиями (линиями главного основания).

Перманентная изоклинная система состоит из развертывающихся поверхностей конгруэнции C, найденной С. П. Финиковым (l. с., стр. 50—51).

2. Поверхность S может быть произвольной поверхностью, обладающей главным основанием.

Отрезки ξ и η определяются уравнениями:

$$pq - mn = 0,$$

$$pm + qn - 2mn + \xi\eta(\xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta\cos\omega)K\sqrt{EG} = 0,$$

где

$$m \equiv \eta\xi_u + \eta\sqrt{E} + \xi(\xi - \eta\cos\omega)\left\{ {11 \atop 2} \right\}\sqrt{\frac{G}{E}},$$

p получается из m с помощью подстановок (u, v), (ξ, η), а q и n имеют те же значения, что и в предыдущем случае.

Перманентная изоклинная система состоит из главных линейчатых поверхностей конгруэнции C. Эта конгруэнция C была найдена мной в задаче изгибания конгруэнции с сохранением ее главных линейчатых поверхностей ([3])..

3. Поверхность S может быть произвольной поверхностью, обладающей главным основанием.

Отрезки ξ и η вычисляются из уравнений:

$$pq + mn - 2qn = 0,$$

$$qn - pm + \xi\eta(\xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta\cos\omega) K \sqrt{EG} = 0,$$

где m, n, p и q имеют указанные выше значения.

Перманентная изоклинная система линейчатых поверхностей конгруэнции C не содержится в полной системе.

§ 3. Вопрос о возможности рассматриваемого изгибания в случае луча, лежащего в соответствующей касательной плоскости поверхности S и проходящего через точку касания, но отличного от касательной к линии главного основания, а также в случае луча, занимающего произвольное положение относительно касательной плоскости поверхности S, остается открытым, так как в первом случае задача приводится к двум или трем уравнениям на одну функцию, а во втором случае к восьми уравнениям на пять функций, определяющих положение луча, так что без дальнейшего исследования получающихся здесь весьма сложных систем нельзя даже утверждать, что соответствующее изгибание существует.

Институт математики.
Московский университет.

Поступило
10 V 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Д. Россинский, ДАН, XX, № 2—3 (1938). [2] С. П. Фиников, Общая задача изгибания на главном основании (диссертация), гл. II (1917), см. также S. Finikoff, Bull. des Sci. Math., **53**, 341—360 (1929). [3] С. Д. Россинский, ДАН, XVIII, № 6, 319—321 (1938).