Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 2—3

МАТЕМАТИКА

С. Д. РОССИНСКИЙ

ПЕРМАНЕНТНЫЕ СОПРЯЖЕННЫЕ И ПЕРМАНЕНТНЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ КОНГРУЭНЦИЙ

(Представлено академиком С. А. Чаплыгиным 9 V 1938)

§ 1. Известно, что развертывающиеся поверхности конгруэнции, главные линейчатые, распределительные, характеристические и, наконец, линейчатые поверхности, сферическое изображение которых состоит из линий нулевой длины, образуют полную систему линейчатых поверхностей данной конгруэнции [теорема K. Ogura (1)].

Теория изгибания конгруэнций с сохранением какой-либо одной из пяти перечисленных систем линейчатых поверхностей до сих пор еще полностью не построена. Вполне изучено С. П. Финиковым изгибание с сохранением развертывающихся поверхностей (2); изгибание с сохранением главных линейчатых поверхностей (3), а равно с сохранением распределительных поверхностей (4) исследовано мной, вероятно, во всех тех случаях, которые допускают нетривиальные решения.

Каждое из этих изгибаний относится к системам линейчатых поверхностей, обладающих двумя из трех следующих свойств: ортогональностью (главные и распределительные поверхности), изоклинностью (главные и развертывающиеся поверхности) и сопряженностью (распределительные и развертывающиеся поверхности — для последних самосопряженность) (5).

Естественно поэтому поставить более широкую задачу об изгибании конгруэнции с сохранением системы линейчатых поверхностей, подчиненных какому-либо одному из трех перечисленных свойств. Теория таких изгибаний позволяет смотреть с иной точки зрения на теоремы изгибания с сохранением одной из пяти систем поверхностей, входящих в полную систему. Вместе с тем эта теория обнаруживает существование таких перманентных систем линейчатых поверхностей, которые не содержатся в полной системе.

В виду того что в теории изгибания конгруэнции с сохранением ее развертывающихся главных линейчатых и распределительных поверхностей результаты, заслуживающие внимания, получаются только в случае изгибания на главном основании, в настоящем исследовании мы ограничиваемся рассмотрением вопросов, относящихся к изгибанию на главном основании.

Допустим, что с касательными плоскостями некоторой поверхности S, обладающей главным основанием, неизменно связаны соответствующие лучи некоторой конгруэнции C.

В настоящем сообщении излагаются результаты, относящиеся к двум из трех следующих задач.

Предположим, что сети главного основания поверхности S соответствует сопряженная (ортогональная или изоклинная) система линейчатых поверхностей конгруэнции C, сохраняющая свою сопряженность (ортогональность или изоклинность) во все время изгибания поверхности S на главном основании. Спрашивается, какова природа соответствующей поверхности S, конгруэнции C, а также перманентной сопряженной (ортогональной или изоклинной) системы линейчатых поверхностей? Решение третьей задачи будет предметом ближайшего сообщения.

§ 2. Перманентная сопряженная система

1. Случай луча конгруэнции C, ортогонального соответствующей касательной плоскости поверхности S. Поверхность S может быть произвольной поверхностью, обладающей главным основанием.

Точка входа луча в касательную плоскость определяется уравнениями:

$$E\left[1+\xi_u+\xi\left\{{11 \atop 1}\right\}+\eta\left\{{12 \atop 1}\right\}\right]+F\left[\eta_u+\xi\left\{{11 \atop 2}\right\}+\eta\left\{{12 \atop 2}\right\}\right]=0,$$

$$G\left[1+\eta_v+\eta\left\{{22 \atop 2}\right\}+\xi\left\{{12 \atop 2}\right\}\right]+F\left[\xi_v+\eta\left\{{22 \atop 1}\right\}+\xi\left\{{12 \atop 1}\right\}\right]=0,$$

где E, F, G — коэффициенты формы $d\bar{\rho}^2$, относящейся к поверхности S, определяемой вектором $\bar{\rho}(u, v)$, а функции ξ, η характеризуют искомую точку входа, содержась в выражении вектора $\bar{\rho}_1(u, v)$ исходной поверхности конгруэнции C:

$$\bar{\rho}_1=\bar{\rho}+\xi\bar{\rho}_u+\eta\bar{\rho}_v.$$

Эта исходная поверхность совпадает со средней поверхностью конгруэнции C, а, следовательно, S совпадает со средней огибающей поверхностью конгруэнции C.

Перманентная сопряженная система линейчатых поверхностей не содержится в полной системе.

Полученная здесь конгруэнция совпадает с той, которая была указана мною в задаче изгибания конгруэнции на главном основании с сохранением ее средней огибающей поверхности ([6]).

2. Случай луча конгруэнции C, лежащего в соответствующей касательной плоскости поверхности S и притом параллельного касательной к линии главного основания.

Поверхность S может быть произвольной поверхностью, обладающей главным основанием с одним семейством геодезических линий.

Конгруэнция C образована прямыми, параллельными касательным к геодезическим $u=\text{const}$ главного основания и отсекающими на касательных к линиям $v=\text{const}$ главного основания отрезки:

$$\xi=e^{\int\frac{F}{E}\left\{{11 \atop 2}\right\}du}\left[C(v)-\int\sqrt{E}\,e^{-\int\frac{F}{E}\left\{{11 \atop 2}\right\}du}\,du\right],$$

где $C(v)$ — произвольная функция от v, а E, F, G имеют значение, указанное выше.

Перманентная сопряженная система линейчатых поверхностей совпадает с системой распределительных поверхностей конгруэнции C. Полученная конгруэнция C была уже найдена мной в задаче изгибания конгруэнции с сохранением ее распределительных поверхностей ([4]).

3. Случай луча конгруэнции C, отсекающего на соответствующих касательных к линиям главного основания конечные и неравные нулю отрезки ξ и η.

Поверхность S может быть произвольной поверхностью, обладающей главным основанием.

Отрезки ξ и η определяются уравнениями:

$$\eta\xi_u + \eta\sqrt{E} + \xi(\xi - \eta\cos\omega)\left\{ {11 \atop 2} \right\}\sqrt{\frac{G}{E}} = 0,$$

$$\xi\eta_v + \xi\sqrt{G} + \eta(\eta - \xi\cos\omega)\left\{ {22 \atop 1} \right\}\sqrt{\frac{E}{G}} = 0,$$

где $\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}$. В случае поверхности Voss'а имеем, следовательно, $\xi = -s_v + c_1(v)$, $\eta = -s_u + c_2(u)$, где s_v и s_u — дуги геодезических линий $v=\text{const}$ и $u=\text{const}$, а c_1 и c_2 — произвольные функции указанных аргументов.

Перманентная сопряженная система линейчатых поверхностей не входит в полную систему. Конгруэнция C не принадлежит к числу нормальных или изотропных.

4. Случай луча, лежащего в касательной плоскости поверхности S и проходящего через точку касания. Это случай вырождения. Здесь S может быть только развертывающейся поверхностью, а C цилиндрической конгруэнцией.

5. Случай луча, занимающего произвольное положение относительно соответствующей касательной плоскости поверхности S.

Здесь задача приводится к шести уравнениям для пяти функций, определяющих положение луча. Вот почему без дальнейшего исследования этой системы уравнений, весьма притом сложной, нельзя даже утверждать, что соответствующее изгибание существует. Итак, в этом случае вопрос остается открытым.

§ 3. Перманентная ортогональная система

1. Случай луча конгруэнции C, ортогонального соответствующей касательной плоскости поверхности S. Поверхность S может быть произвольной поверхностью Монжа (surface moulure); ее главное основание состоит из линий кривизны.

Точка входа луча в соответствующую касательную плоскость ничем не ограничена.

Перманентная ортогональная система линейчатых поверхностей не содержится в полной системе.

2. Случай луча конгруэнции C, лежащего в соответствующей касательной плоскости поверхности S и проходящего через точку касания. Поверхность S может быть произвольной поверхностью, обладающей главным основанием.

Угол φ луча конгруэнции C с касательной к линии $v=\text{const}$ главного основания определяется уравнением

$$\left[\varphi_v + \left\{ {12 \atop 2} \right\}\sqrt{\frac{G}{E}}\sin\omega\right]\left[\omega_u - \varphi_u + \left\{ {12 \atop 1} \right\}\sqrt{\frac{E}{G}}\sin\omega\right] = K\sqrt{EG}\sin\varphi\sin(\omega - \varphi),$$

где K — гауссова кривизна поверхности S, а остальные величины имеют уже указанное выше значение.

Перманентная ортогональная система линейчатых поверхностей не входит в полную систему.

3. Случай луча конгруэнции C, совпадающего с касательной к линии одного семейства главного основания (частный случай предыдущего). Поверхность S может быть произвольной поверхностью, обладающей главным основанием при одном семействе геодезических линий.

Конгруэнция C — нормальная — состоит из касательных к этому семейству геодезических.

Перманентная ортогональная система линейчатых поверхностей совпадает с системой развертывающихся (главных линейчатых) поверхностей конгруэнции.

4. Случай луча конгруэнции C, отсекающего на соответствующих касательных к линиям главного основания конечные и неравные нулю отрезки ξ и η. Поверхность S может быть произвольной поверхностью, обладающей главным основанием.

Отрезки ξ и η связаны только одним уравнением:

$$PQ+(\xi^2+\eta^2-2\xi\eta\cos\omega)\,\xi\eta K\sqrt{EG}=0,$$

где

$$P=\xi\eta_u-\eta\xi_u+\left\{{12 \atop 1}\right\}\sqrt{\frac{E}{G}}\,\eta(\eta-\xi\cos\omega)+\left\{{11 \atop 2}\right\}\sqrt{\frac{G}{E}}\,\xi(\eta\cos\omega-\xi),$$

а Q получается из P помощью подстановок $(u,\ v)$, $(\xi,\ \eta)$.

Перманентная ортогональная система линейчатых поверхностей не содержится в полной системе.

5. Случай луча конгруэнции C, лежащего в касательной плоскости и параллельного касательной к линии главного основания (частный случай предыдущего при условии, что один из отрезков ξ и η становится бесконечно большим). Поверхность S может быть произвольной поверхностью, обладающей главным основанием с одним семейством геодезических линий.

Конгруэнция C состоит из лучей, параллельных касательным к геодезическим линиям главного основания и отсекающих на касательных к линиям второго семейства главного основания произвольные отрезки.

Перманентная ортогональная система линейчатых поверхностей конгруэнции C не входит в полную систему.

6. Случай луча конгруэнции C, расположенного произвольно относительно соответствующей касательной плоскости поверхности S.

В этом случае три функции, определяющие направление луча, связаны четырьмя уравнениями весьма сложного вида. Без дальнейшего исследования этой системы никаких заключений о существовании соответствующего изгибания сделать нельзя.

Институт математики.
Московский университет.

Поступило
10 V 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] K. Ogura, Science Reports of Tôhoku Imperial University, Sendai, Japan, V, № 2, 107—120 (1916). [2] С. П. Фиников, Общая задача изгибания на главном основании (диссертация), гл. II, Москва, 1917, см. также S. Finikoff, Bull. des Sci. Math., **53**, 341—360 (1929). [3] S. Rossinski, C. R., **200**, 515—516 (1935) или мемуар в Annali di Matematica, (IV), XIV, 349—358 (1935/36); ДАН, XVIII, № 6, 319—321 (1938). [4] С. Д. Россинский, ДАН, XII, № 5, 349—351; № 6—7, 435—438 (1938). [5] G. Sannia, Annali di Matematica, (III), XV, fasc. 2, 143—185 (1908). [6] S. Rossinski, C. R., **200**, 1268—1270 (1935).