Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 2—3

МАТЕМАТИКА

С. СОБОЛЕВ, член-корреспондент Академии Наук СССР

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ КВАЗИ-ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Хорошо известно, что для существования непрерывного дифференциального решения квази-линейного гиперболического уравнения:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial t}, x_1, \ldots x_n, t\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial t}, x_1, \ldots x_n, t\right), \tag{1}$$

где

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} p_i p_j > C \sum_{i=1}^{n} p_i^2, \tag{2}$$

удовлетворяющего условиям: $u\Big|_{t=0} = u_0;\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1,$ (3)

требуется, вообще говоря, существование некоторого числа производных от функций u_0 и u_1. Во всех до сих пор появившихся исследованиях число это много больше соответствующего числа для линейных уравнений. Наиболее сильный результат принадлежит Ф. И. Франклю ([1]). Он был получен с помощью оценок семейств функций, имеющих производные, интегрируемые с квадратом ([2], [3]), данных автором настоящей статьи. В предыдущем номере «Докладов» ([4]) нами были доказаны некоторые новые неравенства и теоремы, позволяющие существенно дополнить и улучшить этот результат. Применение новых оценок дает новое уточнение известных неравенств Фридрихса и Леви и позволяет и в квази-линейном уравнении требовать от начальных данных лишь столько производных, сколько их требовалось в линейном.

Рассмотрим прежде всего линейное уравнение:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F, \tag{4}$$

в котором коэффициенты A_{ij} и свободный член F зависят только от $x_1, \ldots x_n, t$ и не зависят от u и ее производных. Допустим, что коэффициенты A_{ij} и свободный член F имеют производные до порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+2$ включительно, в том смысле, как это указано в предыдущей статье.

Рассмотрим некоторую область Ω, в нашем пространстве ограниченную плоскостями $t=0$, $t=T$ и боковой поверхностью S', которую мы предположим везде пространственно или характеристически ориентированной и притом такой, что внешняя нормаль к этой поверхности составляет с осью t острый угол.

Пусть D_t будет ограниченная область, получаемая в результате пересечения Ω с плоскостью $t=\text{const}$. Допустим теперь, что производные от A_{ij} и F удовлетворяют интегральным неравенствам:

$$\left(\int\limits_{D_t}\dots\int\left[\frac{\partial^\rho A_{ij}}{\partial t^{\alpha_0}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}\right]^2 dx_1\dots dx_n\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant A(t) < A,$$

$$\left(\int\limits_{D_t}\dots\int\left[\frac{\partial^\rho F}{\partial t^{\alpha_0}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}\right]^2 dx_1\dots dx_n\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant F(t) < F, \tag{5}$$

$$\rho=0,1,\dots\left[\frac{n}{2}\right]+2,$$

где $A(t)$ и $F(t)$ — заданные ограниченные функции.

Пусть кроме того функции u_0 и u_1 таковы, что

$$\int\limits_{D_0}\dots\int\left[\frac{\partial^\rho u_0}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}\right]^2 dx_1\dots dx_n \leqslant U,$$

$$\int\limits_{D_0}\dots\int\left[\frac{\partial^{\rho-1} u_1}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}\right]^2 dx_1\dots dx_n \leqslant U, \tag{6}$$

$$\rho=0,\ 1,\dots\left[\frac{n}{2}\right]+3.$$

Тогда можно доказать лемму (обобщенная лемма Фридрихса и Леви).

Лемма I. *Пусть*

$$K_\rho(t)=\int\limits_{D_t}\dots\int\sum\left[\frac{\partial^\rho u}{\partial t^{\alpha_0}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}\right]^2 dx_1\dots dx_n. \tag{7}$$

Функции $K_\rho(t)$ удовлетворяют системе неравенств:

$$K_0(t)\leqslant K_0(0)+2\int\limits_0^t K_0(t_1)^{\frac{1}{2}}K_1(t_1)^{\frac{1}{2}}\,dt_1,$$

$$K_{\rho+1}(t)\leqslant K_{\rho+1}(0)+N\int\limits_0^t K_{\rho+1}(t_1)^{\frac{1}{2}}\left\{F(t_1)+A(t_1)\sum_{s=1}^{\rho+1}K_s(t_1)^{\frac{1}{2}}\right\}dt_1, \tag{8}$$

где постоянная N зависит только от формы области Ω и числа A и не зависит от вида коэффициентов A_{ij}, F и решения u.

Доказательство первого из неравенств (8) не представляет труда. Чтобы доказать второе, предположим сначала, что производные от u непрерывны. Следуя Фридрихсу и Леви, рассмотрим тождество:

$$J_v(t)=\overbrace{\int\limits_{S_t}\dots\int}^{n}\left\{\left[\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right]\cos nt-\right.$$

$$-2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial t}\cos nx_j\Big\}\,dS\equiv$$

$$\equiv\overbrace{\int\limits_{\Omega_t}\cdots\int}^{n+1}\Big\{-2\Big[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\Big]\frac{\partial v}{\partial t}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big[\frac{\partial A_{ij}}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x_j}+2\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial t}\Big]\Big\}\,dx_1\ldots dx_n\,dt, \tag{9}$$

здесь через Ω_t обозначена часть области $\Omega(x_1,\ldots x_n,\ t')$, где $t'\leqslant t$, а через S_t поверхность Ω_t. Если мы подставим в (9) вместо v все производные порядка ρ от u и сложим, то будем иметь, оценивая сумму поверхностных интегралов:

$$\sum_{\rho}J_v(t)\geqslant N_1K_{\rho+1}(t)-N_2K_{\rho+1}(0), \tag{10}$$

где $N_1\geqslant\alpha>0$, α не зависит ни от A, ни от области D_t. С другой стороны, сумма $\sum\limits_{\rho}J_v(t)$ может быть оценена с помощью неравенства

$$\sum_{\rho}J_v(t)\leqslant N_3\overbrace{\int\limits_{\Omega_t}\cdots\int}^{n+1}\Big\{\sum\Big|\frac{\partial^s A_{ij}}{\partial t^{\alpha_0}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\Big|\Big|\frac{\partial^{\rho+1}u}{\partial t^{\beta_0}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\Big|\Big|\frac{\partial^{\rho-s+2}u}{\partial t^{\gamma_0}\ldots\partial x_n^{\gamma_n}}\Big|+$$

$$+\sum\Big|\frac{\partial^{\rho+1}u}{\partial t^{\alpha_0}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\Big|\Big|\frac{\partial^{\rho}F}{\partial t^{\beta_0}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}\Big|\Big\}\,dx_1\ldots dx_n dt'=$$

$$=N_3\int\limits_0^t\Big(\sum R_{s,\rho}(t')+\sum R_{\rho}(t')\Big)\,dt', \tag{11}$$

где N_3 — абсолютная постоянная, зависящая только от ρ, а знак $\sum$ распространен на все производные порядка ρ, $s<\rho$ и $\rho-s+2$. Далее имеем, пользуясь неравенством Гельдера:

$$R_{s,\rho}(t')\leqslant\Big[\int\limits_{D_t}\cdots\int\Big|\frac{\partial^s A_{ij}}{\partial t^{\alpha_0}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\Big|^{\frac{4n}{4s-5}}dx_1\ldots dx_n\Big]^{\frac{4s-5}{4n}}\times$$

$$\times\Big[\int\limits_{D_t}\cdots\int\Big[\frac{\partial^{\rho+1}u}{\partial t^{\beta_0}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}\Big]^2dx_1\ldots dx_n\Big]^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\Big[\int\limits_{D_t}\cdots\int\Big|\frac{\partial^{\rho-s+2}u}{\partial t^{\gamma_0}\ldots\partial x_n^{\gamma_n}}\Big|^{\frac{4n}{2n-4s+5}}dx_1\ldots dx_n\Big]^{\frac{2n-4s+5}{4n}}. \tag{12}$$

На основании оценок прошлой заметки [4] будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &R_{s,\rho}(t') \leqslant A(t')\left\{N_4 K_{\rho+1}(t') + N_5 K_{\rho+1}(t')^{\frac{1}{2}} K_{\rho-s+2}(t')^{\frac{1}{2}}\right\}, \\ &\text{и аналогично:} \quad R_{l}(t') \leqslant N_6 F(t')\, K_{\rho+1}(t')^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

отсюда и вытекает лемма I.

В случае, когда u, A_{ij} и F не имеют непрерывных производных, вопрос решается опять с помощью приближения средними функциями [5].

Из доказанной леммы между прочим следует

Теорема I. *Пусть u — некоторое решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям (3). Тогда все производные от решения u до порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+3$ включительно суммируемы с квадратом по любой области D_t при $t < T'$. Оценка интегралов от их квадратов зависит исключительно от чисел A, F и U и формы области Ω, но не зависит от того, какое решение рассматривается.*

Для доказательства заметим, что $K_\rho(t')^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2}[1 + K_\rho(t')]$, и применим метод последовательных оценок. Из теоремы I следует

Теорема II. *Уравнение (4) имеет при условиях (3) решение, непрерывное вместе с производными 1-го и 2-го порядка.*

Доказательство этой теоремы опускаем как известное.

Переходим теперь к уравнениям квази-линейным. Неравенства (8) позволяют доказать существование решений у таких уравнений с помощью самых разнообразных методов [6]. Мы используем некоторое видоизменение метода И. Г. Петровского [7]. Пусть в уравнении (1) коэффициенты A_{ij} и F суть функции, обладающие T) свойством.

Тогда справедлива лемма.

Лемма II. *Можно построить такую функцию $v(x_1, \ldots x_n, t)$, имеющую производные до порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+3$, интегрируемые с квадратом по всякой D_t, что $w = u - v$ удовлетворяет квази-линейному уравнению типа (1), а первые $\left[\frac{n}{2}\right]+3$ производных от w обращаются в нуль при $t = 0$.*

Доказательство, основанное на теории средних функций, мы здесь опускаем. На основании этой леммы начальные условия всегда сводятся к нулю с производными до порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+3$. Заменим теперь уравнение (1) функциональным уравнением

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\Big(u(x_1, \ldots x_n, t-h), \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots x_n, t-h), \\ &\qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, \ldots x_n, t-h),\ x_1, \ldots x_n, t\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \\ &\qquad = F\Big(u(x_1, \ldots x_n, t-h), \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots x_n, t-h), \\ &\qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, \ldots x_n, t-h), x_1, \ldots x_n, t\Big). \end{aligned} \tag{14}$$

При $h = 0$ мы получим уравнение (1).

Тогда для уравнения (14) имеет место оценка:

$$A(t) \leqslant K\left[1+\sum_{\rho=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3} K_\rho (t-h)^{\frac{1}{2}}\right], \quad F(t) \leqslant K\left[1+\sum_{\rho=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3} K_\rho (t-h)^{\frac{1}{2}}\right]. \quad (15)$$

Неравенство это вытекает из предыдущих оценок. Отсюда следует

Лемма III. *Решения* (14), *обращающиеся в нуль с производными при* $t=0$, *имеют производные 2-го порядка, равностепенно непрерывные и ограниченные.*

Для доказательства нужно воспользоваться методом последовательных оценок, применяя его к системе (9) и (15). Уравнения (14) при всяком h разрешимы в силу специального подбора начальных условий.

Мы получим при этом с помощью принципа выбора теорему:

Теорема III. *Уравнение* (1) *имеет решение*, *удовлетворяющее условиям* (3) *и имеющее непрерывные производные 1-го и 2-го порядка.*

Для исследования единственности решения достаточно показать, что если в некотором промежутке $0 \leqslant t \leqslant \delta$ уравнению удовлетворяет тождественный нуль, то другого решения оно иметь не может.

В этом случае вторая из формул (15) заменяется

$$F(t) \leqslant K\left[\sum_{\rho=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3} K_\rho (t-h)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Вторичное применение последовательных оценок дает искомый результат. Таким образом имеем теорему.

Теорема IV. *Решение уравнения* (1) *при условиях* (3) *единственно.*

Математический институт им. В. А. Стеклова. Академия Наук СССР.

Поступило 7 V 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Матем. сб., **2 (44)**, № 5, 793 (1937). [2] ДАН, I (X), № 7 (84), 279 (1936). [3] Матем. сб., **2 (44)**, № 3, 465. [4] ДАН, XX, № 1 (1938). [5] Тр. ФМИ им. Стеклова, IX, 29 (1935). [6] Schauder, Fund. Math., XXIV, 213 (1935). [7] Мат. сб., **2 (44)**, № 5, 815 (1937).