Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 2—3

*МАТЕМАТИКА*

Г. Я. ХАЖАЛИЯ

# К ТЕОРИИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

*(Представлено академиком И. М. Виноградовым 3 V 1938)*

1. Пусть $D$—произвольная конечная двусвязная жорданова область в плоскости комплексного переменного $z$ и пусть $c_1$ и $c_2$—ее внешняя и внутренняя границы.

Пусть в области $D$ задано поле кривых такое, что один конец каждой линии поля расположен на $c_1$, а другой на $c_2$.

Пусть линии нашего поля заданы уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x&=f_1(s,\varphi), & 0&\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, \\ y&=f_2(s,\varphi), & s_1(\varphi)&<s<s_2(\varphi), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $\varphi$ есть параметр, определяющий кривую поля, а за текущий параметр $s$ принята длина дуги линии поля.

Мы будем в дальнейшем предполагать, что функции $f_1(s,\varphi)$ и $f_2(s,\varphi)$ суть функции, непрерывные со своими частными производными первого порядка в области изменения $s$ и $\varphi$, кроме того, что функциональный определитель

$$\frac{D(x,y)}{D(s,\varphi)}=J(s,\varphi)$$

отличен от нуля.

Теорема I. *Если двусвязная область $D$ отображается конформно $w=f(z)$ на круговое кольцо $1<|w|<R$, то для любого поля* (1), *обладающего перечисленными свойствами, будем иметь*:

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\int\limits_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)}\frac{ds}{J(s,\varphi)}}\leqslant\frac{2\pi}{\operatorname{Log}R}, \tag{2}$$

*знак равенства достигается тогда и только тогда, когда линии поля вместе с полем ортогональных кривых образуют изотермическую сеть, т. е. когда при отображении $w=f(z)$ линиям поля* (1) *соответствуют отрезки $1<|w|<R$ радиусов круга $|w|<R$.*

Доказательство. В самом деле допустим, что при отображении $w=f(z)$ линия семейства (1) при $\varphi=\varphi_1$ не переходит в отрезок радиуса.

Дадим параметру $\varphi$ в уравнениях (1) значения:

$$\varphi_1=\varphi_1^{(n)},\quad \varphi_2^{(n)},\ \ldots\ ,\ \varphi_n^{(n)},\quad \varphi_j^{(n)}=\varphi_{j-1}^{(n)}+\frac{2\pi}{n}\qquad (j=2,\ 3,\ \ldots\ ,\ n),$$

тогда в области $D$ получим $n$ линий семейства, которые область $D$ будут разбивать на $n$ областей $D_j^{(n)}$, обладающих свойствами:

1. Области $D_j^{(n)}$ $(j=1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n)$ попарно не имеют общих точек.

2. Граница $D_j^{(n)}$ $(j=1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n)$ состоит из двух дуг $A_jB_j$, $A'_jB'_j$ линий семейства, принадлежащих области $D$ с концами $A_j$, $A'_j$ на $c_2$ и $B_j$, $B'_j$ на $c_1$, и из дуг $A_jA'_j$ и $B_jB'_j$ кривых $c_1$ и $c_2$.

Отобразим конформно области $D_j^{(n)}$ $(j=1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n)$ на некоторый прямоугольник $R_j^{(n)}$ так, чтобы точки $A_j$, $B_j$ и $A'_j$, $B'_j$ перешли в вершины прямоугольника. Обозначая через $b_j^{(n)}$ длину сторон прямоугольника, соответствующих при отмеченном отображении дугам $A_jB_j$ и $A'_jB'_j$, а через $a_j^{(n)}$ длину каждой из двух других сторон того же прямоугольника, в силу теоремы Grötzsch'a (1) будем иметь:

$$\sum_1^n \frac{a_j^{(n)}}{b_j^{(n)}}\leqslant\frac{a_1^{(0)}}{b_1^{(0)}}<\frac{2\pi}{\operatorname{Log} R}. \tag{3}$$

Рассмотрим область $D_j^{(n)}$. Уравнения дуг $A_jB_j$ и $A_{j+1}$ и $B_{j+1}$ будут:

$$\left.\begin{aligned} &x=f_1(s,\ \varphi_j), \quad s_1(\varphi_i)<s<s_2(\varphi_i),\\ &y=f_2(s,\ \varphi_j), \quad \varphi=\varphi_j=\mathrm{const}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &x=f_1(s,\ \varphi_j+\Delta\varphi), \quad s_1(\varphi)<s<s_2(\varphi_2),\\ &y=f_2(s,\ \varphi_j+\Delta\varphi).\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Считая $\Delta\varphi$ бесконечно малым, найдем отношение $\dfrac{a_j^{(n)}}{b_j^{(n)}}$, пренебрегая бесконечно малыми высших порядков.

Для этой цели рассмотрим на линии (4):

$$x=f_1(s,\ \varphi_j),$$
$$y=f_2(s,\ \varphi_j)$$

точку $m=m(s_0,\ \varphi_j)$ и из этой точки проведем нормаль $mn$ до ее пересечения с линией (5):

$$x=f_1(s,\ \varphi_j+\Delta\varphi),$$
$$y=f_2(s,\ \varphi_j+\Delta\varphi).$$

Пусть при конформном отображении области $D_j^{(n)}$ на $R_j^{(n)}$ точке $m=m(s_0,\ \varphi_j)$ на стороне длины $b_j^{(n)}$ прямоугольника $R_j^{(n)}$ будет отвечать точка, удаленная от вершины $R_j^{(n)}$ на $\sigma$; $\sigma$ растет вместе с $s$. Рассмотрим на линии:

$$x=f_1(s,\ \varphi_j),$$
$$y=f_2(s,\ \varphi_j)$$

точку, бесконечно близкую к точке $m$, $m'=m'(s_0+\Delta s,\ \varphi_j)$, и из этой точки также проведем нормаль $m'n'$ до пересечения с линией:

$$x=f_1(s,\ \varphi_j+\Delta\varphi),$$
$$y=f_2(s,\ \varphi_j+\Delta\varphi);$$

этой точке на стороне длины $b_j^{(n)}$ прямоугольника $R_j^{(n)}$ будет отвечать некоторая точка $\sigma + \Delta\sigma$.

Полагая $a_j^{(n)} = \Delta\varphi$, определим соответственно этому $b_j^{(n)}$. Элементарному прямоугольнику со сторонами $\Delta\varphi$, $\Delta\sigma$, лежащему в прямоугольнике $R_j^{(n)}$, будет соответствовать, с точностью до бесконечно малых высших порядков, прямоугольник со сторонами длины $\Delta s$ и $mn = \delta_n$.

В силу конформности получим

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\sigma} = \frac{\delta_n}{\Delta s}$$

или

$$b_j = \sum \Delta\sigma = \sum \frac{\Delta\varphi}{\delta_n} \Delta s.$$

Вычислим длину нормали $\delta_n$, получим:

$$\delta_n = \frac{D(x, y)}{D(s, \varphi)} \Delta\varphi = J(s, \varphi) \Delta\varphi.$$

Отсюда после перехода к пределу при $n \to \infty$ окончательно получим

$$b_j^{(n)} = \int\limits_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)} \frac{ds}{J(s, \varphi)}. \tag{6}$$

Подставляя в (3) вместо $a_j^{(n)}$ $\Delta\varphi$, а вместо $b_j^{(n)}$ его выражение из (6), с точностью до бесконечно малых, вместе с $\Delta\varphi$ получим:

$$\sum_1^n \frac{\Delta\varphi}{\int\limits_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)} \frac{ds}{J(s, \varphi)}} < \frac{a_1^{(0)}}{b_1^{(0)}} < \frac{2\pi}{\operatorname{Log} R}$$

или, переходя к пределу при $n \to \infty$, окончательно получим:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\int\limits_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)} \frac{ds}{J(s, \varphi)}} < \frac{2\pi}{\operatorname{Log} R}.$$

Доказанная теорема представляет собой обобщение цитированной выше леммы Grötzsch'а; нам представляется, что в различных приложениях наша форма леммы имеет то существенное преимущество, что левая часть основного неравенства определяется непосредственно по линиям поля.

В частности наша теорема дает возможность дать прямое определение числа $R$:

$$\frac{1}{2\pi} \operatorname{Log} R = \min \frac{1}{\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\int\limits_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)} \frac{ds}{J(s, \varphi)}}},$$

линии семейства (1), осуществляющие этот минимум, вместе с полем ортогональных линий образуют изотермическую сеть, т. е. определяют конформное отображение области $D$ на круговое кольцо.

2. Из доказанной выше теоремы можно весьма просто получить другое минимальное свойство функции, реализующей конформное отображение двусвязной области на кольцо.

Теорема II. *Пусть $D$—произвольная двусвязная область в плоскости комплексного переменного $z$, пусть $R$—модуль области $D$ и пусть $\{f(z)\}$ есть семейство аналитических функций, правильных в области $D$ и обладающих свойствами:*

1) $f(z)$ *однозначна;*
2) $|f(z)| \geqslant 1$;
3) $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz \geqslant 1$,

*где $c$—замкнутая гладкая кривая, лежащая в области $D$, негомологичная нулю в области $D$.*

*При этих условиях для любой функции семейства имеем*

$$\pi(R^2 - 1) \leqslant \iint\limits_D |f'(z)|^2 d\sigma.$$

Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда функция $w = f(z)$ реализует конформное отображение области $D$ на кольцо

$$1 < |w| < R.$$

Тбилисский математический институт.

Поступило 5 V 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Grötzsch, Leipzig. Berichte, VII (1928).