Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 6

МЕХАНИКА

Н. МОИСЕЕВ

О ФАЗОВЫХ ОБЛАСТЯХ СПЛОШНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ

(Представлено академиком В. Г. Фесенковым 24 VI 1938)

В предыдущей заметке [1] мы установили некоторый определенный процесс построения областей фазового пространства, названных нами областями сплошной устойчивости и неустойчивости в смысле Ляпунова. В настоящей заметке мы хотим остановиться на вопросе о значении этих областей для нужд качественного анализа динамических задач, равно как и на вопросе о возможных расширениях описанного приема на случаи более общие, чем рассмотренный в цитированной заметке. При этом мы будем пользоваться без пояснений терминами и обозначениями цитированной заметки.

Одной из наиболее существенных сторон содержания понятий областей, о которых идет речь, является согласно четырем теоремам предыдущей заметки следующее условное свойство: если среди полутраекторий T^0_+ задачи (1) существуют такие, которые являются равномерно погруженными в одну из названных областей, то в таком случае движения по этим полутраекториям с точки зрения теории устойчивости Ляпунова должны быть охарактеризованы согласно наименованию соответствующих областей.

В силу этого проблема конструкции областей, интересующих нас, оказывается весьма тесно связанной с задачей, представляющей несомненный интерес для качественной теории дифференциальных уравнений и трактующей о выделении из общего множества всех состояний движения в данной проблеме—множества движений устойчивых*, множества движений неустойчивых, множества движений асимптотически устойчивых и множества движений абсолютно неустойчивых. При этом должно отметить, что эти вопросы являются весьма важными также и для практики; таким например является вопрос о выделении движений, обладающих асимптотической устойчивостью.

Прием, обсуждавшийся в предыдущей заметке, является приемом чисто качественным и ни в какой мере не требует выполнения интеграции уравнений движения. Области, доставляемые этим приемом, оказываются стоящими в тесном родстве с теми подмножествами движений, о которых мы только что говорили. Можно указать ряд примеров, в которых обсу-

* Эта задача была впервые поставлена Н. Г. Четаевым в его глубоких исследованиях об устойчивых траекториях динамики [2, 3]. Главный интерес в этих исследованиях падает впрочем на долю проблемы выделения индивидуальных устойчивых траекторий.

ждаемый метод действительно доставляет с большой простотой возможность установления областей фазового пространства, заполненных точками положительных полутраекторий, которые все являются однотипными с точки зрения ляпуновской теории устойчивости.

Однако в произвольном случае построенная описанным путем область может оказаться и не содержащей внутри себя ни одной полутраектории, которая была бы в нее равномерно погружена. Распознать такие случаи и отличить их от случаев, когда полутраектории, равномерно погруженные в область, существовать будут, при помощи одного только описанного приема не представляется возможным. Для указанной цели необходимо привлечение некоторого иного метода. Этим методом может явиться один из методов теории локализации фазовых траекторий ([4]). Используя его как вспомогательный прием, мы сможем в ряде случаев решить некоторые из обсуждавшихся только что задач.

С другой стороны, возможно указать и такие задачи, также представляющие интерес, в которых метод конструкции областей сплошной устойчивости может быть использован как метод вспомогательный, комбинируемый с методом локализации. Задачи эти касаются локализации отдельных фазовых траекторий или их конечных отрезков. Метод построения областей сплошной устойчивости здесь может служить для целей рекогносцировки и установления тех частей фазового пространства, внутри которых можно рассчитывать на успешное применение методов локализации.

Обращаясь к технике конструкции областей сплошной устойчивости, мы замечаем, что получаемые области в весьма заметной степени зависят от используемой функции V. Варьируя эту функцию, можно рассчитывать на получение в данной задаче также и удачной конструкции достаточно широких областей.

В частности заметим, что одной из наиболее простых и практически удобных разновидностей функции V, могущих с успехом служить для конструкции областей сплошной устойчивости, являются квадратичные формы относительно переменных ξ_s с коэффициентами, зависящими от координат точки P^0, или даже с постоянными коэффициентами. Техника использования таких форм изложена и пояснена примерами в статье ([5]).

К технике же конструкции областей должно отнести и то замечание, что в предыдущей заметке мы пользовались только некоторыми вполне определенными совокупностями условий, которые являются достаточными для наличия устойчивости, неустойчивости и т. д. Расширяя количество таких совокупностей и привлекая следовательно кроме использованных нами теорем Ляпунова также и некоторые иные теоремы, мы можем в ряде случаев добиться значительного упрощения и улучшения аппарата нашей теории. Одним из таких приемов может служить например использование прекрасной теоремы Четаева о неустойчивости ([6]).

Перейдем теперь к обсуждению некоторых возможных обобщений теории конструкции областей сплошной устойчивости.

Первое, что здесь должно отметить, это вполне возможное расширение теории на случай, когда и правые части дифференциальных уравнений (1) и используемая функция V явно зависят от времени. Ограничение, введенное в этом отношении в предыдущей заметке, диктуется лишь желанием упростить изложение.

Во-вторых, совершенно естественным является постановка вопроса о построении областей сплошной о р б и т а л ь н о й устойчивости, равно как и областей сплошной условной устойчивости, или устойчивости по отношению к некоторым определенным функциям фазовых координат. Проблема областей сплошной орбитальной устойчивости подвергнута частичному обсуждению в уже цитированной статье ([5]).

Далее, весьма существенным может явиться и то замечание, что теория, построенная нами для случая устойчивости в смысле Ляпунова, или устойчивости первого типа, может быть совершенно аналогично построена и для случаев устойчивости второго, третьего и четвертого типов [7,8]. Из этих проблем особенно важной в практическом отношении должно признать проблему конструкции областей сплошной устойчивости третьего типа, или устойчивости в смысле Н. Крылова и Н. Боголюбова. Равным образом представляет интерес и развитие теории построения областей сплошной противоустойчивости и сплошной непротивоустойчивости [7,8]. Наконец совершенно аналогично может быть поставлен вопрос о построении областей постоянного значения вероятностей устойчивости и неустойчивости, противоустойчивости и непротивоустойчивости во всех упомянутых выше смыслах [7,8,9].

В заключение несколько слов о литературе вопроса.

Насколько известно пишущему настоящие строки, проблема конструкции областей сплошной устойчивости в смысле Ляпунова, понимаемая как проблема общего качественного анализа, ставится в предыдущей и настоящей заметках впервые. Однако здесь же необходимо отметить, что автору этих заметок была известна работа В. В. Степанова, опубликованная им в 1936 г. и посвященная проблеме построения областей сплошной устойчивости в смысле Якоби траекторий динамической задачи с двумя степенями свободы [10]. При всем отличии содержания этой статьи Степанова от содержания настоящих заметок, отличии, вполне соответствующем разнице между понятиями устойчивости траектории в смысле Якоби и устойчивости состояния движения в смысле Ляпунова, должно подчеркнуть, что основная идея как там, так и тут является одной и той же. Именно, характеристика устойчивости в избранном смысле записывается не в виде, явно зависящем от времени или от его эквивалента, определяющего положение невозмущенной фазовой точки на некоторой определенной фазовой полутраектории, но как функция фазовых координат самой невозмущенной фазовой точки. Эта идея дала возможность Степанову рассматривать характеристику устойчивости в смысле Якоби как функцию точки фазового пространства Биркгоффа и следовательно как некоторую областную характеристику в этом пространстве. Аналогично этому и мы в предыдущей и настоящей заметках рассматриваем характеристику устойчивости в смысле Ляпунова (и в иных, аналогичных этому смыслах, упоминавшихся выше) также как функцию точки фазового пространства и следовательно как некоторую качественную областную характеристику в этом пространстве. Указанное исчерпывает все сходное в статьях Степанова и настоящей.

Поступило
25 VI 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Моисеев, ДАН, XX, № 6 (1938). [2] Сборник Казанского авиац. ин-та, № 5, 3 (1936). [3] Уч. зап. Каз. ун-та, 91, № 4, 3 (1931). [4] Н. Моисеев, ДАН, XVII, № 6 (1937). [5] Н. Моисеев, Труды ГАИШ, **9**, вып. 2 (1938). [6] Н. Четаев, ДАН, № 9 (1934). [7] Н. Моисеев, Труды Воен.-возд. академии, вып. 26 (1938). [8] Н. Моисеев, ДАН, XVI, № 6 (1937). [9] N. Moisseiev, Math. ZS., **42**, 515 (1937). [10] В. Степанов, Астр. журн., **13**, 435 (1936).