Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 6

МЕХАНИКА

Н. МОИСЕЕВ

О ПОСТРОЕНИИ ОБЛАСТЕЙ СПЛОШНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СМЫСЛЕ ЛЯПУНОВА

(Представлено академиком В. Г. Фесенковым 24 VI 1938)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_s = X_s(x_1, x_2, \ldots x_n), \quad (s = 1, 2, \ldots n). \tag{1}$$

Пусть фазовая точка

$$P^0(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0) \tag{2}$$

движется так, что ее координаты удовлетворяют уравнениям:

$$\dot{x}_s^0 = X_s(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0) = X_s^0, \quad (s = 1, 2, \ldots n). \tag{3}$$

Вводя обозначения:

$$\xi_s = x_s - x_s^0, \quad (s = 1, 2, \ldots n), \tag{4}$$

перепишем уравнения (1) в виде:

$$\dot{\xi}_s = \Xi_s(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0), \quad (s = 1, 2, \ldots n). \tag{5}$$

Правые части этих «уравнений возмущенного движения» являются некоторыми определенными функциями от ξ_s, обращающимися в нули, когда все ξ_s делаются одновременно нулями. В остальном мы предположим эти правые части ограниченными, однозначными и непрерывными функциями аргументов ξ_s и x_s^0 повсюду в фазовом пространстве $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$ за исключением, быть может, отдельных точек, которые исключаются из дальнейшего рассмотрения вместе со своими окрестностями.

Рассмотрим теперь некоторую функцию:

$$V = V(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0). \tag{6}$$

Мы предположим, что эта функция V будет функцией Ляпунова [1] относительно переменных ξ_s и следовательно будет однозначной непрерывной функцией от ξ_s, обращающейся в нуль, когда величина

$$\rho = \left|\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2}\right| \tag{7}$$

обращается в нуль, каковы бы ни были при этом значения переменных x_s^0. Мы предположим также, что каждому положительному числу ε можно поставить в соответствие такое положительное число δ, не зависящее от переменных x_s^0, что во всем фазовом пространстве $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$ мы будем иметь

$$|V(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)| < \varepsilon \tag{8}$$

всякий раз, когда будет выполнено единственное условие:

$$\rho < \delta. \tag{9}$$

Последнее предположение гарантирует то, что на любой фазовой положительной полутраектории T_+^0, соответствующей некоторой произвольной совокупности начальных условий и определяемому ими частному решению (2) уравнений (1), функция V (6), в которой переменные x_s^0 будут заменены их явными выражениями через время, будет функцией Ляпунова, «допускающей бесконечно малый высший предел» ([2]).

Рассмотрим теперь некоторое фиксированное положение точки P^0 (2) и построим в пространстве $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ следующие три многообразия: V^0, в каждой точке которого будет $V=0$ *; V^+, в каждой точке которого будет $V>0$, и наконец V^-, в каждой точке которого будет $V<0$. Это даст возможность поставить избранной точке P^0 (2) в соответствие следующие три числа: $\rho(V^0)$, $\rho(V^+)$ и $\rho(V^-)$, равные точным нижним границам расстояний ρ точки P^0 от точек многообразий V^0, V^+ и V^- соответственно. Опираясь на значение вполне определенных, однозначных и неотрицательных функций $\rho(V^0)$, $\rho(V^+)$ и $\rho(V^-)$ точки фазового пространства (2), мы строим затем в этом пространстве $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$ следующие четыре многообразия: $\rho^+(V^0, V^+)$, в каждой точке которого как $\rho(V^0)$, так и $\rho(V^+)$ будут положительными; $\rho^+(V^0, V^-)$, в каждой точке которого как $\rho(V^0)$, так и $\rho(V^-)$ будут положительными; $\rho^0(V^+)$, в каждой точке которого $\rho(V^+)$ будет равно нулю; и наконец $\rho^0(V^-)$, в каждой точке которого $\rho(V^-)$ будет равно нулю.

Вычисляем теперь при помощи уравнений (5) и (3) полную производную от V (6) по времени t:

$$\dot{V} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s} \Xi_s + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s^0} X_s^0. \tag{10}$$

В силу предположения о том, что V (6) является функцией Ляпунова и следовательно допускает однозначные, ограниченные и непрерывные ** частные производные первого порядка по всем своим аргументам, а также в силу предположений, сделанных по отношению к уравнениям (5) и (3), величина $\dot{V}$ (10) будет однозначной, непрерывной функцией от переменных ξ_s и x_s^0. Опираясь на знание этой функции и фиксируя точку (2), мы строим в пространстве $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ следующие три многообразия: $\dot{V}^0$, в каждой точке которого будет $\dot{V}=0$ ***; $\dot{V}^+$, в каждой точке которого будет $\dot{V}>0$, и наконец $\dot{V}^-$, в каждой точке которого будет $\dot{V}<0$. После этого мы можем поставить каждой точке P^0 (2) в соответствие следующие три числа: $\rho(\dot{V}^0)$, $\rho(\dot{V}^+)$ и $\rho(\dot{V}^-)$, равные точным нижним границам расстояний ρ точки P^0 от точек многообразий V^0, V^+ и V^- соответственно. Имея вполне определенные однозначные и неотрицательные функции $\rho(\dot{V}^0)$, $\rho(\dot{V}^+)$ и $\rho(\dot{V}^-)$ точки (2) фазового пространства $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$, мы строим затем в этом пространстве следующие четыре многообразия: $\rho^+(\dot{V}^0, \dot{V}^+)$, в каждой точке которого величины $\rho(\dot{V}^0)$ и $\rho(\dot{V}^+)$ будут положительными; $\rho^+(\dot{V}^0, \dot{V}^-)$,

---

* При этом мы считаем точку P^0 не входящей в многообразие V^0.

** Предположение непрерывности частных производных не является необходимым ([3]), и последующая теория может быть построена и без этого предположения.

*** Точка P^0 при этом считается в многообразии $\dot{V}^0$ невключаемой.

в каждой точке которого величины $\rho(\dot{V}^0)$ и $\rho(\dot{V}^-)$ будут положительными; $\rho^+(\dot{V}^+)$, в каждой точке которого величина $\rho(\dot{V}^+)$ будет положительной; и наконец многообразие $\rho^+(\dot{V}^-)$, в каждой точке которого величина $\rho(\dot{V}^-)$ будет положительной.

Образуем теперь пересечение:

$$(S)_{V^-} = \rho^+(V^0, V^+)\cdot\rho^+(\dot{V}^-) \tag{11}$$

и пересечение:

$$(S)_{V^+} = \rho^+(V^0, V^-)\cdot\rho^+(\dot{V}^+). \tag{12}$$

Каждое из двух многообразий (11) и (12) в фазовом пространстве $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ будет нами именоваться областью сплошной устойчивости в смысле Ляпунова, установленной при помощи функции V (6) *, и будет обозначаться символом $(S)_V$.

Образуем далее пересечения:

$$(IS)_{V^-} = \rho^0(V^-)\cdot\rho^+(\dot{V}^0, \dot{V}^+) \tag{13}$$

и

$$(IS)_{V^+} = \rho^0(V^+)\cdot\rho^+(\dot{V}^0, \dot{V}^-). \tag{14}$$

Каждое из них мы будем называть областью сплошной неустойчивости в смысле Ляпунова, установленной при помощи функции V (6), и будем обозначать символом $(IS)_V$.

Образуем также пересечения:

$$(As)_{V^-} = \rho^+(V^0, V^+)\cdot\rho^+(\dot{V}^0, \dot{V}^-) \tag{15}$$

и

$$(As)_{V^+} = \rho^+(V^0, V^-)\cdot\rho^+(\dot{V}^0, \dot{V}^+). \tag{16}$$

Каждое из них мы будем именовать областью сплошной асимптотической устойчивости в смысле Ляпунова, установленной при помощи функции V (6), и будем обозначать при помощи символа $(As)_V$**.

Образуем наконец пересечения:

$$(ISa)_{V^-} = \rho^+(V^0, V^+)\cdot\rho^+(\dot{V}^0, \dot{V}^+) \tag{17}$$

и

$$(ISa)_{V^+} = \rho^+(V^0, V^-)\cdot\rho^+(\dot{V}^0, \dot{V}^-). \tag{18}$$

Каждое из этих двух многообразий мы будем называть областью сплошной абсолютной неустойчивости в смысле Ляпунова, установленной при помощи функции V (6), и будем обозначать символом $(ISa)_V$***.

Для сокращения дальнейших формулировок мы введем еще один новый термин. Именно мы будем говорить, что некоторая положительная фазовая полутраектория T_+^0 является равномерно по признаку b погруженной в область фазового пространства B, определяемую неравенством $b > 0$, где b есть некоторая функция точки, если все точки упомянутой полутраектории T_+^0 расположены внутри области B и если точная нижняя граница значений b в точках полутраектории T_+^0 является числом, отличным от нуля.

* Заметим здесь, что если бы мы хотели ограничиться конструкцией одной лишь этой области сплошной устойчивости, то в таком случае мы могли бы и не накладывать на функцию (6) ограничений, связанных с неравенствами (8) и (9).

** Эта область будет заведомо пустой, если условие несжимаемости $\sum\limits_{s=1}^{n}\dfrac{\partial X_s}{\partial x_s} = 0$ будет выполнено повсюду в пространстве $(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

*** См. предыдущее примечание.

После всего сказанного мы можем формулировать следующие четыре предложения:

1. Всякое частное решение системы (1), которому будет соответствовать полутраектория T^0_+, равномерно по признакам $\rho(V^0)$, $\rho(V^+)$ и $\rho(\dot{V}^-)$ или $\rho(V^0)$, $\rho(V^-)$ и $\rho(\dot{V}^+)$] погруженная в область $(S)_{V^-}$ [или $(S)_{V^+}$], является устойчивым в смысле Ляпунова.

Утверждение это является следствием первой теоремы второй методы Ляпунова ([4]).

2. Всякое частное решение системы (1), которому соответствует полутраектория T^0_+, равномерно по признакам $\rho(\dot{V}^0)$ и $\rho(\dot{V}^+)$ [или $\rho(\dot{V}^0)$ и $\rho(\dot{V}^-)$] погруженная внутрь области $(IS)_{V^-}$ [или $(IS)_{V^+}$], является в смысле Ляпунова неустойчивым.

Утверждение это есть следствие второй теоремы Ляпунова ([5]).

3. Всякое частное решение системы (1), которому отвечает полутраектория T^0_+, равномерно по отношению к признакам $\rho(V^0)$, $\rho(V^+)$, $\rho(\dot{V}^0)$ и $\rho(\dot{V}^-)$ [или $\rho(V^0)$, $\rho(V^-)$, $\rho(\dot{V}^0)$ и $\rho(\dot{V}^+)$] погруженная внутрь области $(As)_{V^-}$ [или $(As)_{V^+}$], является асимптотически устойчивым в смысле Ляпунова.

Это утверждение является следствием второго примечания к первой теореме Ляпунова ([6]).

4. Всякое частное решение системы (1), которому отвечает полутраектория T^0_+, равномерно по признакам $\rho(V^0)$, $\rho(V^+)$, $\rho(\dot{V}^0)$ и $\rho(\dot{V}^+)$ [или $\rho(V^0)$, $\rho(V^-)$, $\rho(\dot{V}^0)$ и $\rho(\dot{V}^-)$] погруженная внутрь области $(ISa)_{V^-}$ [или $(ISa)_{V^+}$], является абсолютно неустойчивым в смысле Ляпунова.

Это утверждение представляет собой следствие второй теоремы Ляпунова ([5]), причем термин «абсолютная неустойчивость» берется в смысле Г. Н. Дубошина.

Поступило
25 VI 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, изд. 2, 59—60 (1935). [2] Ляпунов, loc. cit., стр. 61. [3] Н. Моисеев, ДАН, I, № 4 (1936). [4] Ляпунов, loc. cit., стр. 61. [5] Ляпунов, loc. cit., стр. 65. [6] Ляпунов, loc. cit., стр. 64.