**Доклады Академии Наук СССР**
**1938. Том XX, № 6**

*АСТРОФИЗИКА*

**А. Б. СЕВЕРНЫЙ**

# О ГРАВИТАЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ МАТЕРИАЛЬНОЙ СФЕРЫ

*(Представлено академиком В. Г. Фесенковым 24 VI 1938)*

Понятие гравитационная неустойчивость было выдвинуто Jeans'ом в связи с различными проблемами космогонического характера [1]. Пусть дана сфера радиуса $a$, заключающая в себе «сжимаемую» материю, подчиняющуюся законам гидродинамики, так что имеют место уравнения движения

$$f_x = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \text{ и т. д.,} \tag{1}$$

где $X$ и т. д.—компоненты внешней силы по оси, $f$ и т. д. — соответствующая компонента ускорения, $p$ — давление, $\rho$ — плотность материи в точке $x, y, z$. Рассмотрим вариированное движение, такое, что центр элемента $dx\,dy\,dz$ в момент $t$ имеет координаты $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ (или рассмотрим другую конфигурацию, для которой значения $\rho$, $p$ и т. д. относятся не к точке $x, y, z$, а к точке $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$). Допустим, что:

1) существует силовая функция $u$,

2) давление зависит только от плотности.

Тогда из сравнения вариированной конфигурации с первоначальной получим уравнение, определяющее виртуальное смещение $\bar{s}=\bar{i}\xi+\bar{j}\eta+\bar{k}\zeta$ (loc. cit.)

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} - \operatorname{div}\bar{A} = 4\pi G\rho\sigma + \nabla^2\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\sigma\right), \tag{2}$$

где $\sigma=\operatorname{div}\bar{s}$, $\operatorname{div}\bar{A}=\frac{\partial}{\partial x}(\bar{s}, \operatorname{grad} f_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\bar{s}, \operatorname{grad} f_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\bar{s}, \operatorname{grad} f_z)$, т. е. $\sigma$ есть разряжение (или сгущение), связанное с виртуальным перемещением $\bar{s}$. Состояние материи будем называть гравитационно неустойчивым в смысле Jeans'a, если смещения $\xi, \eta, \zeta$, а следовательно и $\sigma$, суть монотонные функции времени $t$. Если эти величины периодические функции $t$, то конфигурация материи устойчива в смысле $J$ (но может быть неустойчива в смысле Jacobi или Ляпунова).

Допустим далее 3): что ускорение $\bar{f}$ не зависит от координат и времени (т. е. нет систематических движений; в частности — материя в покое). Тогда

$$\operatorname{div}\bar{A}=0$$

и основное уравнение (2) будет

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}=4\pi G\rho\sigma+\nabla^2\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\,\sigma\right). \qquad (3)$$

В соответствии с допущением 2) примем, что состояние материи определяется наиболее общим законом

$$p=K\rho^{\gamma} \qquad (\gamma>0), \qquad (4)$$

и допустим, что 4) плотность материи — ограниченная функция $x$, $y$, $z$:

$$\rho_{\min}<\rho<\rho_{\max}, \qquad \rho_{\min}>0. \qquad (5)$$

Переходя к полярным координатам, краевые условия для $\sigma$ примем в виде:

$$\left.\begin{array}{lll}\text{(a)}\ r=0, & \sigma \text{ и } \dfrac{\partial\sigma}{\partial r}\text{ — конечны и непрерывны,}\\ \text{(b)}\ r=a, & \sigma(a)=0.\end{array}\right\} \qquad (6)$$

Решение (3) ищем в виде:

$$\sigma=e^{ikt}f(r)\,Y(\theta,\varphi);$$

тогда при условии непрерывности $Y(\theta,\varphi)$ на сфере $r=1$ $Y$ будет сферической функцией порядка $l$, а для $f(r)$ получим

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}f(r)\right)\right]+\left[m(r)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]\frac{\partial p}{\partial\rho}f(r)=0$$

или, полагая

$$u(r)=\frac{\partial p}{\partial\rho}\,r\,f(r),$$

получим основное уравнение проблемы, уравнение Sturm'a-Liouville'a для $u$:

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\lambda s(r)u-q(r)u=0, \qquad (7)$$

где

$$s(r)=\frac{1}{K\gamma}\rho^{1-\gamma},\quad q(r)=\frac{l(l+1)}{r^2}-\frac{4\pi G}{K\gamma}\rho^{2-\gamma},\quad \lambda\equiv K^2. \qquad (8)$$

$\lambda$ — есть собственное значение проблемы. В силу вышеуказанного масса материи будет гравитационно неустойчива в смысле $J$, если существует хотя бы одно такое $\lambda$, $\lambda_{\min}$, что

$$\lambda_{\min}<0. \qquad (9)$$

Наша цель — установить необходимые и достаточные условия $J$—неустойчивости—или необходимые и достаточные условия существования отрицательных собственных значений уравнения (7) при краевых условиях (6) (a) и (b), которые для функции $u$ требуют

$$u(0)=u(a)=0 \qquad (10)$$

в силу (5). В силу (10) имеем:

$$\lambda_n=\int_0^a\left[u_n'^2+q(r)\,u_n^2\right]dr, \qquad (11)$$

где $u_n$ — соответствующая собственная функция. Необходимое условие выполнения (9) есть: в интервале $(0,a)$ существует такой подинтервал, где функция $q(r)$ отрицательна, т. е., если имеем

$$q(r)=\frac{l(l+1)}{r^2}-\frac{4\pi G}{K\gamma}\rho^{2-\gamma}<0,\quad 0<\xi\leqslant r\leqslant a,$$

или если

$$\frac{l(l+1)}{a^2}<\frac{4\pi G}{K\gamma}(\rho^{2-\gamma})_{\min}$$

в силу монотонности $\frac{l(l+1)}{a^2}$. Таким образом необходимое условие того, что одно из $\lambda$ отрицательно, есть

$$a > \sqrt{l(l+1)\frac{K\gamma}{4\pi G(\rho^2-\gamma)_{\min}}} \equiv a_0\,. \tag{12}$$

Подобное условие может быть также получено, исходя из основных положений теории Штурма. Из (11) следует, что при достаточно большом $l$ ни одно из $\lambda$ не будет отрицательно. Следовательно неустойчивы в смысле $J$ только низшие вибрации $l$. Для установления достаточного условия используем теорему [2]: если в дифференциальном уравнении (7) коэффициент $s(r)$ изменяется во всех точках области в одном и том же направлении, то $n$—$e$ собственное значение изменяется при любом граничном условии в противоположном направлении; при изменении коэффициента $q$ в одном и том же направлении во всех точках области собственные значения изменяются в том же направлении. Имеем:

$$q(r) < q_M(r) = \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{4\pi G}{K\gamma}(\rho^2-\gamma)_{\min}\,,$$

$$s(r) > s_m(r) = \frac{1}{K\gamma}(\rho^1-\gamma)_{\min}\,.$$

Следовательно всякое собственное значение $\lambda^*$ уравнения

$$\frac{d^2u}{dr^2} - q_M u + \lambda^* s_m u = 0 \tag{13}$$

больше соответствующего собственного значения нашей проблемы.

Полагая

$$m = \lambda s_m + \frac{4\pi G}{K\gamma}(\rho^1-\gamma)_{\min}\,, \tag{14}$$

вместо (13) будем иметь:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left(m - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)u = 0\,,$$

собственные функции которого, удовлетворяющие условию $u(0)=0$, суть:

$$u_l(r) = \sqrt{r}\,J_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{m}\,r)\,,$$

где $J_{l+\frac{1}{2}}$ есть функция Бесселя порядка $l+\frac{1}{2}$. Собственные значения $\lambda^*$ определяются условием $u(a)=0$, откуда

$$\sqrt{m_{il}}\,a = \pm q_{il}\,, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

где $q_{il}$ — последовательные корни функции Бесселя порядка $l+\frac{1}{2}$. В силу (14) имеем:

$$\lambda^*_{il} = \left[\left(\frac{q_{il}}{a}\right)^2 - \frac{4\pi G}{K\gamma}(\rho^2-\gamma)_{\min}\right]\frac{1}{s_{\min}}$$

и $\lambda^*_{il}$ будет отрицательно, если найдется такое $q_{il}$, что

$$a > q_{il}\sqrt{\frac{K\gamma}{4\pi G(\rho^2-\gamma)_{\min}}}\,.$$

Наименьшее из $q_{il}$ есть $q_{00}\,(=3.172)$; таким образом если выполняется условие

$$a > 3.172\sqrt{\frac{K\gamma}{4\pi G(\rho^2-\gamma)_{\min}}} \equiv a_c\,, \tag{15}$$

то по крайней мере наименьшее собственное значение $\lambda^*_{00}$ будет отрицательно; а вместе с тем и $\lambda_{00}$ будет также отрицательно (так как $\lambda < \lambda^*$). Таким образом условие (15) есть достаточное условие неустойчивости в смысле $J$. Сравнение необходимого условия (12) и достаточного (15) (при $l=1$) показывает, что $a_c$ только в 3.2 раза превышает $a_0$. Общий вывод нашей работы таков: гравитационная неустойчивость материальной сферы при состоянии материи $p = K\rho^\gamma$ и повсюду с конечной неисчезающей плотностью наступает при условии, что радиус сферы превышает некоторое критическое значение $a_c$. Подробный анализ конкретных случаев есть предмет следующих статей. Однако заметим, что для космических масс материи примерные границы $\gamma$ суть $1 < \gamma < 2$. Наиболее интересен случай $\gamma = 1$, когда плотность сильнее всего влияет на критическое значение $a_c$. Принимая для $\rho_{\min}$ величину $\sim 10^{-30}$ г/см³ (плотность внегалактического пространства по Хэбблу), мы получили для $a_c$ величины от одного до ста парсек, т. е. величины, несколько меньшие размеров галактических систем.

Поступило
25 VI 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Jeans, Astronomy a. Cosmogony, 337—341 (1928). [2] Курант и Гильберт, Методы математ. физики, гл. VI, § 2 (1933).