Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 7—8

МАТЕМАТИКА

В. С. ЛЮКШИН

ОБ ИЗГИБАНИИ ЗАМКНУТЫХ И ОТКРЫТЫХ С КРУГОВЫМИ РЕБРАМИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 8 VII 1938)

Изучение бесконечно малого изгибания в целом поверхностей вращения отрицательной кривизны с особой линией, круговым ребром, приводит к случаям: поверхности открытые, с параболическими или обыкновенными краями, открытые с одной стороны и с конической, особой точкой с другой, наконец замкнутые с двумя особыми коническими точками. Метод изучения изгибания этих поверхностей тот же, который мы употребляли в предыдущих своих работах. Ограничимся рассмотрением двух случаев.

1. Дана в плоскости (z, r) линия ABC, состоящая из двух аналитических дуг AB и BC; точка B—угловая или острие, находится на оси Or на расстоянии $r_0 > 0$ от начала; линия пересекает ось вращения Oz в точках: $A(-z_0, 0)$, $C(z_1, 0)$, где $z_0 > 0$, $z_1 > 0$; кривые AB и BC всюду выпуклостью обращены к оси вращения и обладают всеми свойствами кривой OA предыдущей работы [1]. Обозначим через S и $\bar{S}$ поверхности от вращения кривых AB и BC; поверхность, составленную из этих двух поверхностей, обозначим через $S+\bar{S}$. Пусть она имеет две конические точки A и C, в которых касательные к меридиану ABC имеют углы с Oz, отличные от 0 и π; от вращения точки B получается круговое ребро, причем, рассматривая этот круг принадлежащим к S или к $\bar{S}$, мы можем предположить его обыкновенным или параболическим.

Пусть кривые AB и BC определяются уравнениями:

$$AB:\quad \left.\begin{aligned} & r = r(z) = a(z+z_0) + \varphi(z); \\ & r'(-z_0) = a > 0,\ \varphi(-z_0) = \varphi'(-z_0) = 0; \\ & \varphi(z) > 0;\ r(0) = az_0 + \varphi(0) = r_0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$BC:\quad \left.\begin{aligned} & \bar{r} = \bar{r}(z) = b(z_1 - z) + \bar{\varphi}(z); \\ & \bar{r}'(z_1) = -b,\ b > 0,\ \bar{\varphi}(z_1) = \bar{\varphi}'(z_1) = 0; \\ & \bar{\varphi}(z) > 0;\ \bar{r}(0) = bz_1 + \bar{\varphi}(0) = r_0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Поверхность вращения $S+\bar{S}$ определится уравнениями (1) и (2), к которым надо прибавить угол вращения v, один и тот же для S и $\bar{S}$, изменяющийся от 0 до 2π. Считая a и b переменными, получим однопараметрическое семейство поверхностей $S+\bar{S}$, ибо

$$az_0+\varphi(0)=bz_1+\bar{\varphi}(0). \tag{3}$$

Ищем поверхность $S_1+\bar{S}_1$, полученную из $S+\bar{S}$ изгибанием, с параметром изгибания t, причем S изгибается в S_1, $\bar{S}$ изгибается в $\bar{S}_1$, круговое ребро поверхности $S+\bar{S}$ переходит при изгибании в единственную линию поверхности $S_1+\bar{S}_1$.

Пусть уравнения поверхностей S_1 и $\bar{S}_1$ будут:

$$S_1:\quad \left.\begin{aligned} z_1&=z+tZ(z, v),\\ r_1&=r(z)+tR(z, v),\\ v_1&=v+tV(z, v),\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где $-z_0\leqslant z\leqslant 0$, Z, R, V—искомые функции.

$$\bar{S}_1:\quad \left.\begin{aligned} \bar{z}_1&=z+t\bar{Z}(z, v),\\ \bar{r}_1&=\bar{r}(z)+t\bar{R}(z, v),\\ \bar{v}_1&=v+t\bar{V}(z, v),\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где $0\leqslant z\leqslant z_1$, $\bar{Z}, \bar{R}, \bar{V}$—искомые функции.

Определив изгибание $S+\bar{S}$ как такое соответствие поверхностей $S+\bar{S}$ и $S_1+\bar{S}_1$, что равенство $ds_1^2-ds^2=0$ выполняется с точностью до t отдельно для соответствующих дуг поверхностей S и S_1, также для соответствующих дуг на $\bar{S}$ и $\bar{S}_1$, мы для отыскания искомых функций применяем метод Cohn-Vossen'а.

Мы получаем две системы дифференциальных уравнений соответственно для S и $\bar{S}$ [см. формулы (3) нашей работы ([1])] или их заменяющие уравнения:

$$rR_n''+(n^2-1)r''R_n=0, \tag{6}$$

$$\bar{r}\bar{R}_n''+(n^2-1)\bar{r}''\bar{R}_n=0, \tag{7}$$

где R_n и $\bar{R}_n$—коэффициенты рядов Фурье, в которые разлагаются R и $\bar{R}$.

На искомые функции накладываются, во-первых, требования:

$$\left.\begin{aligned} Z(0, v)&=\bar{Z}(0, v),\\ R(0, v)&=\bar{R}(0, v),\\ V(0, v)&=\bar{V}(0, v),\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

во-вторых, ограничения, вытекающие из неподвижности особых точек A и C; наконец могут быть ограничения на особой линии, т. е. при $z=0$, что зависит от характера этой линии, рассматривая ее в отдельности для S и $\bar{S}$.

Решения уравнений (6) и (7):

$$R_n(z)=(z+z_0)\,g(a, n; z),$$

$$\bar{R}_n(z)=(z_1-z)\,\bar{g}(b, n; z)$$

удовлетворяют условиям в особых точках в случае изгибания $S+\overline{S}$. Искомые функции примут вид:

$$R(z, v) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(z)\,[C_{n1}\cos nv + C_{n2}\sin nv],$$

$$\overline{R}(z, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{R}_n(z)\,[\overline{C}_{n1}\cos nv + \overline{C}_{n2}\sin nv],$$

где постоянные множители интегрирования отличны от нуля и аналогично для оставшихся функций $Z, \overline{Z}, V, \overline{V}$, причем Z и V выражаются через R по формулам (5) и (7) работы ([2]).

Условия (8) будут удовлетворены, если потребуем выполнения для каждого n следующих равенств:

$$\left.\begin{aligned} R_n(0)\,C_{n1} = \overline{R}_n(0)\,\overline{C}_{n1}; \quad Z_n(0)\,C_{n1} = \overline{Z}_n(0)\,\overline{C}_{n1}; \\ R_n(0)\,C_{n2} = \overline{R}_n(0)\,\overline{C}_{n2}; \quad Z_n(0)\,C_{n2} = \overline{Z}_n(0)\,\overline{C}_{n2}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Это приводит к такому условию:

$$Z_n(0)\,\overline{R}_n(0) = R_n(0)\,\overline{Z}_n(0),$$

или, выразив Z_n через R_n, к условию:

$$(n^2-1)\,R_n(0)\,\overline{R}_n(0)\,[\overline{r}'(0) - r'(0)] + r_0\,[\overline{R}_n'(0)\,R_n(0) - R_n'(0)\,\overline{R}_n(0)] = 0. \tag{10}$$

Это уравнение удовлетворяется при конечном числе значений a, зависящем от n. Итак, поверхность $S+\overline{S}$ изгибается лишь при некоторых значениях a. В ряде частных случаев условие (10) упрощается.

Пусть линия ABC симметрична относительно Or, $r'(0) = a + \theta = -\overline{r}'(0)$, $R_n(-z) = \overline{R}_n(z)$, условие (10) примет вид

$$R_n(0)\,[(n^2-1)(a+\theta)\,R_n(0) + r_0 R_n'(0)] = 0,$$

откуда

$$R_n(0) = 0, \quad \frac{R_n'(0)}{R_n(0)} = -\frac{(n^2-1)(a+\theta)}{r_0}.$$

Так как эти условия удовлетворяются при некоторых значениях $a = a^{(i)}$ и $a = \overline{a}^{(i)}$ [см. работу ([1])], то среди семейства поверхностей $S+\overline{S}$ найдутся поверхности, допускающие бесконечно малое изгибание 1-го порядка, причем особая линия переходит в особую же линию, лежащую на цилиндре $r_1 = r_0$, или же особая линия переходит в плоскую линию, лежащую в плоскости кругового ребра. Последний случай не имеет места, если в точке B будет общая касательная к AB и BC, перпендикулярная к Oz. При значениях $a \neq a^{(i)}$ поверхность не допускает изгибания.

Рассмотрим несимметричную линию ABC: в точке B касательная к AB не перпендикулярна к Oz; пусть $r'(0) = a + \theta$, но касательная к BC в той же точке B пусть перпендикулярна к Oz, $\overline{r}'(0) = -\infty$.

Известно [см. нашу работу ([3])], что в этом случае поверхность $\overline{S}$ может изгибаться, если $\overline{R}_n(0) = 0$. Последнему равенству удовлетворяют $b = b^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots m$, m зависит от n. Задав теперь такое $a = \overline{a}^{(i)}$, чтобы $Z_n(0) = 0$ [тогда $R_n(0) \neq 0$], мы найдем из (3) значение b, при котором или $\overline{R}_n(0) = 0$, но тогда условия (9) не выполняются, или же

$b \neq b^{(i)}$, тогда $\bar{S}$ не допускает никакого изгибания. Итак, поверхность $S+\bar{S}$ при $a=\bar{a}^{(i)}$ не изгибаема.

Если рассмотреть двупараметрическое семейство линий ABC (с параметрами a и z_0), то в семействе поверхностей $S+\bar{S}$ найдутся поверхности, допускающие бесконечно малое изгибание.

2. Исследование предыдущим методом изгибания открытых поверхностей вращения отрицательной кривизны с особой круговой линией приводит к общей теореме: если особая линия является обыкновенным кругом широты для S и $\bar{S}$, а на открытый край накладывается какое-нибудь одно из рассмотренных в предыдущих работах условий, то поверхность $S+\bar{S}$ при некоторых значениях параметра может не допускать изгибания, при других—допускать.

Пусть поверхность $S+\bar{S}$ такая же, как в предыдущем § 1: $\bar{r}'(0)=-\infty$, $r'(0)=a+0$, только открытая с одного конца: $\bar{r}(z_1)\neq 0$, и окружность от вращения точки C пусть обыкновенная для $\bar{S}$. Тогда при $a=\bar{a}^{(i)}$ поверхность $S+\bar{S}$ не изгибаема, ибо особая линия, с одной стороны, должна при изгибании S перейти в плоскую линию в плоскости $z=0$, а с другой стороны, при изгибании $\bar{S}$ может перейти только в линию на цилиндре $r_1=r_0$.

Поступило
10 VII 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. С. Люкшин, ДАН, XVIII, № 7 (1938). [2] В. С. Люкшин, Матем. сб., 2 (44), 3 (1937). [3] В. С. Люкшин, ДАН, XVII, № 7 (1937).