Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 7—8

МАТЕМАТИКА

С. ФИНИКОВ

О ПАРЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ, КОТОРЫЕ СООТВЕТСТВУЮТ ТОЧЕЧНО ТАК, ЧТО АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЛИНИИ ОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПЕРЕХОДЯТ В СОПРЯЖЕННУЮ СИСТЕМУ ДРУГОЙ И КАСАТЕЛЬНЫЕ К СООТВЕТСТВУЮЩИМ ЛИНИЯМ ПЕРЕСЕКАЮТСЯ

(Представлено академиком С. А. Чаплыгиным 1 VII 1938)

1. Если между точками двух поверхностей (M) и (M') установлено взаимно однозначное соответствие, то существует единственная сеть линий на поверхности (M) и на поверхности (M') так, что соответствующие касательные пересекаются. Л. С. Ермолаев называет их двойными линиями соответствия, мы будем называть эту сеть коротко сетью d.

Если точки M_1, M_2 взять на линии пересечения соответствующих касательных плоскостей (M) и (M'), то обе поверхности будут определены бесконечно малыми проективными перемещениями тетраэдра MM_1M_2M' по формулам:

$$\left.\begin{aligned} dM &= \omega_0^0 M + \omega_0^1 M_1 + \omega_0^2 M_2, \\ dM_1 &= \omega_1^0 M + \omega_1^1 M_1 + \omega_1^2 M_2 + \omega_1^3 M', \\ dM_2 &= \omega_2^0 M + \omega_2^1 M_1 + \omega_2^2 M_2 + \omega_2^3 M', \\ dM' &= \omega_3^1 M_1 + \omega_3^2 M_2 + \omega_3^3 M', \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где аналитическая точка M_i означает совокупность четырех однородных координат геометрической точки M_i и

$$\omega_i^k = a_i^k\,du + b_i^k\,dv.$$

Сеть d соответствия (M, M') определяется в таком случае уравнением

$$\omega_0^1\omega_3^2 - \omega_0^2\omega_3^1 = 0. \tag{2}$$

То же уравнение (2) определяет развертывающиеся поверхности конгруэнции (MM'); следовательно сеть d становится неопределенной в случае перспективного соответствия поверхностей (M), (M'), т. е. в том случае, когда пары соответствующих точек M, M' лежат на одной прямой MM' с неподвижной точкой O.

2. Если сеть d совпадает с общей сопряженной системой (основанием соответствия), то последовательности Лапласа, построенные на этой сети, исходя из той и другой поверхности, вписаны в последовательность (MM') и описаны около последовательности (M_1M_2). В дру-

гой работе [1] я рассмотрел сеть d, состоящую из асимптотических линий обеих поверхностей.

Сейчас я рассмотрю такое соответствие, когда сеть d на поверхности (M) состоит из асимптотических линий, а на поверхности (M') образует сопряженную систему.

3. Если сеть d принять за координатные линии u, v, а точки пересечения соответствующих касательных — за точки M_1, M_2 и подходящим образом нормировать точки M, M_1, M_2, M', то таблица компонент a_i^k, b_i^k примет вид:

$$\begin{array}{|cccc|}\hline \frac{a-m}{2} & 1 & 0 & 0 \\ a_1^0 & \frac{m-a}{2} & \beta & 0 \\ 0 & n & \frac{a+m}{2} & 1 \\ 0 & a_3^1 & 0 & -\frac{a+m}{2} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|cccc|}\hline \frac{b-n}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{b+n}{2} & m & 1 \\ b_2^0 & \gamma & \frac{n-b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & b_3^2 & -\frac{b+n}{2} \\ \hline \end{array} \qquad (3)$$

где i — номер строки и k — номер столбца.

Какова бы ни была поверхность (M), поверхность (M') будет определена с четырьмя произвольными функциями одного аргумента.

Если $a_3^1 = b_3^2$, то соответствие между (M) и (M') взаимно: асимптотические касательные к поверхности (M') пересекаются с касательными соответствующей сопряженной сети на (M). Для произвольной поверхности (M) поверхность (M') будет определяться с двумя произвольными функциями одного аргумента. Обе поверхности будут находиться в перспективном соответствии.

4. Возвращаясь к общему случаю, заметим, что конгруэнция (MM') всегда сопряжена асимптотическим линиям (M), т. е. развертывающиеся поверхности ее соответствуют асимптотическим линиям поверхности (M), и следовательно фокальные плоскости проходят через асимптотические касательные. Фокусы конгруэнции (M_1M_2) гармонически разделяются этими асимптотическими касательными.

Обратно, ко всякой поверхности (M) можно присоединить с двумя произвольными функциями одного аргумента конгруэнцию (MM'), сопряженную ее асимптотическим линиям; каждая такая конгруэнция несет на своих лучах соответствующие точки семейства поверхностей (M'), зависящего от двух произвольных функций одного аргумента, так что в соответствии, установленном лучами конгруэнции между (M) и (M'), сеть d будет сопряжена на (M') и совпадет с асимптотическими на (M).

5. Точки пересечения соответствующих касательных M_1 и M_2 являются преобразованиями Лапласа поверхности (M') относительно сопряженной системы (u,v), если $m=0$, $n=0$; лучи MM' и M_1M_2 в таком случае сопряжены относительно поверхностей Дарбу, связанных с точкой M поверхности (M). Сеть (u,v) на поверхности (M') — гармоническая; преобразования Лапласа лучей $M'M_1$, $M'M_2$ лежат в касательной плоскости (M) и следовательно пересекаются. Вторые преобразования Лапласа поверхности (M'), т. е. фокусы M_{22}, M_{11} лучей M_1M_{1u}, M_2M_{2v}, лежат на асимптотических касательных MM_2, MM_1.

Такая поверхность (M)—не произвольна: она принадлежит к особому классу, зависящему от шести произвольных функций одного аргумента.

С поверхностью (M') очевидно может быть связана только одна поверхность (M) — огибающая плоскостей, которые содержат преобразования Лапласа касательных $M'M'_u$, $M'M'_v$. Обратно, с поверхностью (M) вообще связана только одна поверхность (M'). Существует однако особый класс поверхностей (M), зависящий от четырех произвольных функций одного аргумента так, что каждая поверхность связана с двумя поверхностями (M') и (M''); касательные к линиям u, v пересекаются с асимптотическими касательными поверхности (M) соответственно в точках M_1, M_2 и M_{11}, M_{22}. Шесть поверхностей (M), (M_1), (M_{22}), (M'), (M_{11}), (M_2) составляют шесть фокальных поверхностей шестизвенной периодической последовательности Лапласа. Противоположные фокальные поверхности в последовательности соответствуют асимптотическим линиям. Две противоположные конгруэнции последовательности, лучи которых попарно пересекаются, — проективно наложимы.

6. Коррелятивное преобразование пространства переводит асимптотические линии в асимптотические и сопряженную систему в сопряженную, но меняет местами два семейства сопряженных линий. Следовательно рассмотренная конфигурация поверхностей (M), (M') перейдет в пару поверхностей $(\overline{M})$, $(\overline{M}')$, где асимптотические линии (u,v) поверхности $(\overline{M})$ будут соответствовать сопряженной сети (u,v) на $(\overline{M}')$, но касательные к линиям сети пересекаются обратно: касательная к асимптотической поверхности $(\overline{M})$ пересекает касательную к линии v на поверхности $(\overline{M}')$ и наоборот. Развертывающиеся поверхности конгруэнции $(\overline{M}_1\overline{M}_2)$ соответствуют асимптотическим поверхности $(\overline{M})$ и точки пересечения луча с асимптотическими касательными суть его фокусы и т. д.

Поступило
2 VII 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Finikoff, Rend. d. Accademia Naz. dei Lincei, **20**, сер. 6, сем. 2, 164—168 (1934).