Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 7—8

МАТЕМАТИКА

П. Е. ДЮБЮК

ТЕОРЕМА, СОДЕРЖАЩАЯ В СЕБЕ ТЕОРЕМЫ ФРОБЕНИУСА, ВЕЙСНЕРА И ТУРКИНА О ЧИСЛЕ ЭЛЕМЕНТОВ ДАННОГО ПОРЯДКА В ГРУППЕ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 28 VI 1938)

В работе «О числе элементов группы, удовлетворяющих некоторым условиям» автором была доказана следующая теорема.

Пусть a и m — порядки элементов, принадлежащих соответственно классам сопряженных элементов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}$ группы $\mathfrak{G}$. Пусть далее n — делитель порядка группы $\mathfrak{G}$, взаимно простой с a и кратный m. Тогда число элементов группы $\mathfrak{G}$, n-я степень которых принадлежит классу $\mathfrak{A}$ и какая-нибудь степень которых входит в класс $\mathfrak{M}$, делится на наибольший делитель n, взаимно простой с m.

Внеся некоторые изменения в метод, примененный в цитированной работе, можно получить следующий более общий результат.

Теорема 1. *Пусть a и m — порядки элементов, принадлежащих соответственно классам сопряженных элементов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}$ группы $\mathfrak{G}$. Пусть далее n — делитель порядка группы $\mathfrak{G}$, кратный m. Число элементов группы $\mathfrak{G}$, n-я степень которых принадлежит классу $\mathfrak{A}$ и какая-нибудь степень которых входит в класс $\mathfrak{M}$, делится на наибольший делитель n, взаимно простой с m.*

В частности, если числа a и n взаимно просты, мы получим отсюда приведенную выше теорему.

Если в условии теоремы 1 положить $m=1$, то класс $\mathfrak{M}$ сведется к единице и мы получим такое хорошо известное предложение Фробениуса [1]:

Число элементов группы $\mathfrak{G}$, n-я степень которых принадлежит данному классу сопряженных элементов $\mathfrak{A}$, кратно n.

С другой стороны, приняв a равным единице и n равным порядку группы $\mathfrak{G}$, мы приходим к следующей теореме, полученной в 1925 г. американским ученым Л. Вейснером [2].

Пусть m — порядок элемента в классе $\mathfrak{M}$ сопряженных элементов группы $\mathfrak{G}$. Число элементов группы, какая-нибудь степень которых принадлежит классу $\mathfrak{M}$, кратно наибольшему делителю порядка группы, взаимно простому с m.

Наконец как следствие теоремы 1 может быть получена * известная теорема В. К. Туркина [4].

* См. по этому поводу работу автора [3].

Пусть n и m — делители порядка группы, причем n кратно m. Число элементов группы, порядок которых есть делитель n и кратное m, делится на наибольший делитель n, взаимно простой с m.

Отметим основные моменты доказательства теоремы 1. Нашей задачей является определение числа элементов x группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющих двум условиям:

$$x^n \subseteq \mathfrak{A}, \tag{1}$$

$$x^\alpha \subseteq \mathfrak{M}, \tag{2}$$

причем число α может быть нами выбрано как угодно. Полагаем $n = la'$, где l — наибольший делитель n, взаимно простой с a'. Как следует из (1), порядок всякого элемента, удовлетворяющего поставленным условиям, должен делиться на aa'. Пусть $a' = a_1 r$, где a_1 — наибольший делитель a', взаимно простой с m. Из (2) заключаем далее, что α должно делиться на a_1. Условия (1) и (2) могут быть теперь заменены следующими:

$$x^{a_1} = z, \tag{3}$$

$$z^{lr} \subseteq \mathfrak{A}, \tag{4}$$

$$z^\beta \subseteq \mathfrak{M}, \tag{5}$$

где число β может нами выбираться как угодно.

В самом деле, если какой-нибудь элемент x удовлетворяет условиям (1) и (2), то он будет также удовлетворять равенству (3) при дополнительных условиях (4) и (5). Обратно, если элемент x удовлетворяет равенству (3) при соблюдении условий (4) и (5), то x будет также удовлетворять условиям (1) и (2). Обозначим элементы z, удовлетворяющие условиям (4) и (5), через $z_1, z_2, \ldots, z_s$.

Будем определять число элементов x, удовлетворяющих одному из условий:

$$x^{a_1} = z_1, \ x^{a_1} = z_2, \ \ldots, \ x^{a_1} = z_s.$$

Совокупность элементов $z_1, z_2, \ldots, z_s$ представляет собой, как легко видеть из условий (4) и (5), инвариантный комплекс элементов группы $\mathfrak{G}$. Число элементов x, удовлетворяющих поставленным условиям, будет поэтому на основании теоремы Фробениуса кратно a_1.

Далее, применяя методы, использованные автором в цитированных выше работах, можно показать, что число элементов группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющих поставленным условиям, будет кратно также наибольшему делителю числа l, взаимно простому с m. Так как l и a взаимно просты, то отсюда вытекает, что число элементов группы, удовлетворяющих поставленным условиям, делится на наибольший делитель n, взаимно простой с m.

Применяя аналогичные методы, мы можем также доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть a — порядок элемента в классе $\mathfrak{A}$ сопряженных элементов группы $\mathfrak{G}$ и m — порядок всех элементов в произвольной системе $\mathfrak{M}$ группы $\mathfrak{G}$. Пусть далее n — делитель порядка группы $\mathfrak{G}$, кратный числу m. Если числа a и m взаимно просты, то число элементов группы $\mathfrak{G}$, n-я степень которых входит в класс $\mathfrak{A}$ и какая-нибудь степень которых принадлежит системе $\mathfrak{M}$, кратно $\varphi(m)$.*

Как следствие теорем 1 и 2 можно получить такой результат.

Теорема 3. *Пусть a — порядок элемента в классе сопряженных элементов $\mathfrak{A}$ группы $\mathfrak{G}$. Пусть далее n — делитель порядка группы $\mathfrak{G}$, кратный некоторому числу m, взаимно простому с a. Тогда число эле-*

ментов группы $\mathfrak{G}$, порядок которых есть кратное m и удовлетворяющих условию $x^n \subseteq \mathfrak{A}$, делится на наибольший делитель n, взаимно простой с m, а также на $\varphi(m)$.

Теорема 3 включает в себя как частный случай следующее обобщение теоремы В. К. Туркина, данное автором (5) в работе «La généralisation du théorème de Turkin».

Пусть n и m — делители порядка данной группы, причем n кратно m, так что

$$n = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_k^{\alpha_k} b_1^{\alpha_{k+1}} b_2^{\alpha_{k+2}} \ldots b_l^{\alpha_{k+l}}; \quad m = a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} \ldots a_k^{\beta_k},$$

где все a_i и b_i — простые числа и для всех i $\beta_i \leqslant \alpha_i$. Тогда число элементов группы, порядок которых есть делитель n и кратное m, делится на число:

$$a_1^{\beta_1-1} a_2^{\beta_2-1} \ldots a_k^{\beta_k-1} b_1^{\alpha_{k+1}} b_2^{\alpha_{k+2}} \ldots b_l^{\alpha_{k+l}}.$$

Исходя из теоремы 1, можно вывести также следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть n и m — делители порядка группы $\mathfrak{G}$, причем n кратно m. Число элементов группы, порядок которых есть кратное m и n-я степень которых принадлежит произвольному классу сопряженных элементов $\mathfrak{A}$ группы $\mathfrak{G}$, кратно наибольшему делителю n, взаимно простому с m.*

Институт математики
Московского государственного университета.

Поступило
29 VI 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Frobenius, Sitzungsber. der Berl. Akad. (1903). [2] L. Weisner, Bull. of the Amer. Math. Soc., **31**, 492—496 (1925). [3] Дюбюк, Математ. сб., **2**, 6 (1937). [4] W. Turkin, C. R., 1059—1061 (1931). [5] Дюбюк, Матем. сб., **1**, 4 (1936).