Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 7—8

МАТЕМАТИКА

В. К. ТУРКИН и П. Е. ДЮБЮК

О СТРОЕНИИ ПРОСТЫХ ГРУПП

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 28 VI 1938)

В работе «Квазинормализаторы и мономиальные представления» В. К. Туркин доказал следующую теорему:

«Пусть $\mathfrak{G}$ есть группа порядка $p^\alpha n$ [p — нечетное простое число, $p(p-1)$ взаимно просто с n]. Пусть A есть элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$. Если порядок нормализатора элемента $A^{p^{k-1}}$ относительно группы $\mathfrak{G}$ не делится на p^{2k}, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель, порядок которого делится на n».

Используя методы, примененные В. К. Туркиным в цитированной работе, можно получить следующее более общее предложение.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{P}$—абелева подгруппа порядка p^α некоторой группы $\mathfrak{G}$ порядка $p^\beta n$ (p — нечетное простое число, n не делится на p). Пусть A — элемент подгруппы $\mathfrak{P}$ порядка p^k, причем всякий элемент $\mathfrak{P}$, сопряженный с A^z равен A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod p$. Если порядок нормализатора элемента $A^{p^{k-1}}$ не делится на $p^{\alpha+k}$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель порядка, делящегося на n.*

Если в частности $\mathfrak{P}$ циклическая группа, то $\alpha = k$ и мы приходим к теореме, усиливающей цитированное предложение В. К. Туркина.

Теорема 1 заключает в себе так же как частный случай следующее хорошо известное предложение Бернсайда (для нечетного p).

Если подгруппа Силова порядка p^α группы $\mathfrak{G}$ порядка $p^\beta n$ (n не делится на p) принадлежит к центру своего нормализатора, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель порядка, делящегося на n.

Действительно, если $\mathfrak{P}$ — подгруппа Силова порядка p^β, принадлежащая к центру своего нормализатора, то группа $\mathfrak{P}$ — абелева, а в качестве элемента A может быть взят любой элемент этой группы (так как никакие два элемента группы $\mathfrak{P}$ по предпосылке теоремы Бернсайда не сопряжены между собой). Таким образом условия теоремы 1 в этом случае обязательно выполняются. Далее, теорема 1 заключает в себе (для нечетного p) следующее предложение, доказанное П. Е. Дюбюком.

Пусть $\mathfrak{P}$ — подгруппа Силова порядка p^α некоторой группы $\mathfrak{G}$ порядка $p^\alpha n$. Пусть далее H — элемент порядка p^l абелевой группы $\mathfrak{H}$ порядка p^k, входящей в группу $\mathfrak{P}$. Если никакая степень элемента H не сопряжена ни с одним элементом группы $\mathfrak{H}$, нормализатор элемента H совпадает с нормализатором элемента $H^{p^{l-1}}$ и $k+l > \alpha$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель порядка, делящегося на n.

Наметим в основных чертах ход доказательства теоремы 1. Пусть

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{P} + \mathfrak{P}G_2 + \ldots + \mathfrak{P}G_s, \tag{1}$$

$$G_\lambda A = P^{(\lambda)} G_{i_\lambda}, \tag{2}$$

где $P^{(\lambda)}$ — элемент подгруппы $\mathfrak{P}$. На основании теоремы, доказанной В. К. Туркиным [1], заключаем, что если произведение

$$P^{(1)} P^{(2)} \ldots P^{(s)} \tag{3}$$

не равно единице, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель порядка, делящегося на n. При вычислении произведения (3) надо принимать во внимание только те элементы $P^{(i)}$, которые соответствуют в смысле равенства (2) вычетам разложения (1), входящим в состав нормализатора элемента $A^{p^{k-1}}$.

Введем теперь следующие обозначения. Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая подгруппа группы $\mathfrak{G}$, содержащая группу $\mathfrak{P}$. Пусть

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P} + \mathfrak{P}A_1 + \ldots + \mathfrak{P}A_l,$$

$$A_\lambda A = P^{(\lambda)} A_{i_\lambda}.$$

Произведение $P^{(1)} P^{(2)} \ldots P^{(l)}$ будем обозначать через $\Pi(\mathfrak{A}, A)$. Далее через $\mathfrak{N}_B^{(\lambda)}$ будем обозначать λ-й квазинормализатор* некоторого элемента B, порядок которого есть степень простого числа p. Наконец через λ_i будем обозначать наибольшее значение числа λ, при котором

$$\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{A^{p^i}} = \mathfrak{N}^{(1)}_{A^{p^i}}.$$

В принятых обозначениях задача сводится к вычислению произведения

$$\Pi(\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{p^{k-1}}}, A).$$

Дальнейшие выкладки основываются на следующих двух леммах.

Лемма 1. *Пусть v есть отношение порядков групп $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}$ и $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}$. Тогда*

$$\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}, A) = [\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}, A)]^v.$$

Примечание. Если $\lambda_i = k - i$, то полагаем, что $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}} = \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^{i+1}}}$.

Лемма 2. *Если $\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{A^{p^i}} \neq \mathfrak{N}^{(\lambda-1)}_{A^{p^i}}$ и $\lambda \leqslant \lambda_{i-1}$, то $\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda-1)}_{A^{p^i}}, A) = [\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{A^{p^i}}, A)]^g$, где $g \equiv p \pmod{p^2}$.*

Легко видеть, что $\Pi(\mathfrak{N}_A^{(k)}, A) = A^Z$, где Z есть отношение порядков групп $\mathfrak{N}_A^{(k)}$ и $\mathfrak{P}$. Пусть отношение порядков групп $\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{p^{k-1}}}$ и $\mathfrak{N}_A^{(k)}$ равно $p^\omega \varphi$, где φ не делится на p. Применяя надлежащим образом приведенные выше леммы, приходим в конце концов к выводу, что

$$\Pi(\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{p^{k-1}}}, A) = A^{Z\xi},$$

причем

$$\xi \equiv 0 \pmod{p^\omega} \not\equiv 0 \pmod{p^{\omega+1}}.$$

Группа $\mathfrak{G}$ может быть простой только в том случае, если произведение $\Pi(\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{p^{k-1}}}, A)$ равно единице, иначе говоря, если отношение порядков групп $\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{p^{k-1}}}$ и $\mathfrak{P}$ делится на p^k, а порядок группы $\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{p^{k-1}}}$ де-

---

* Определение квазинормализатора и основные теоремы о квазинормализаторах даны в работе В. К. Туркина [2].

лится на $p^{k+\alpha}$. Для случая $p=2$ П. Е. Дюбюк доказал следующую теорему:

«Пусть $\mathfrak{G}$ есть группа порядка $2^{\alpha}n$ (n — нечетное). Пусть A есть элемент порядка 2^k группы $\mathfrak{G}$. Если элемент $A^{2^{k-2}}$ не сопряжен со своим обратным элементом и порядок нормализатора элемента $A^{2^{k-1}}$ не делится на 2^{2k}, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель порядка, делящегося на n». Оказывается возможным также доказать следующее более общее предложение, которое одновременно является дополнением к теореме 1.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{P}$ — абелева подгруппа порядка 2^{α} некоторой группы $\mathfrak{G}$ порядка $2^{\beta}n$ (n — нечетное). Пусть A — элемент подгруппы $\mathfrak{P}$ порядка 2^k, причем всякий элемент $\mathfrak{P}$, сопряженный со степенью A, будет снова степенью A. Если элемент $A^{2^{k-2}}$* не сопряжен со своим обратным элементом и порядок нормализатора элемента $A^{2^{k-1}}$ не делится на $2^{k+\alpha}$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель порядка, делящегося на n.

Институт математики.
Московский государственный университет.

Поступило
29 VI 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. К. Туркин, Math. Annal., III, H. 5. [2] В. К. Туркин, Матем. сб., 2, 5 (1937).