Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 7—8

МАТЕМАТИКА

Н. Г. ТУГАНОВ

О ЛИНИЯХ НА ПОВЕРХНОСТИ, ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ И НОРМАЛЬНАЯ КРИВИЗНА КОТОРЫХ СВЯЗАНЫ ЛИНЕЙНЫМ СООТНОШЕНИЕМ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 8 VII 1938)

I. Геометрическое происхождение линий $a\cdot\frac{1}{T_g}+b\cdot\nu=c$. Поставим задачу найти линию на поверхности, обладающую тем свойством, что она имеет общую нормаль к поверхности с другой линией, причем поверхностные триэдры этих линий неизменно между собою связаны. Тогда получим:

$$\frac{\operatorname{ctg}\psi}{T_g}-\nu=\frac{1}{d},$$

где $\frac{1}{T_g}$ — геодезическое кручение линии, ν — нормальная кривизна, d — расстояние между соответственными точками связанных линий; ψ — угол между касательными к связанным линиям в соответственных точках.

Обратно, если линия на поверхности обладает тем свойством, что геодезическое кручение ее и нормальная кривизна связаны между собою линейным соотношением с постоянными коэффициентами, то эта линия имеет общую нормаль к поверхности с другой линией, и поверхностные триэдры этих линий связаны неизменным образом.

Частные случаи:

1) Если сопряженная линия уходит в ∞, тогда имеем линию

$$\frac{1}{T_g}:\nu=\mathrm{const}.$$

2) Если $\psi=90^\circ$, то $\nu=\mathrm{const}$. В частности при $\psi=90^\circ$ и $d=\infty$ получим асимптотические линии.

3) При $\psi=0$ получим линии кривизны поверхности.

4) Если $d\to0$ и $\psi\to0$, причем $\lim\limits_{\substack{d\to0\\ \psi\to0}}\frac{\operatorname{tg}\psi}{d}=\mathrm{const}$, то получим линии $\frac{1}{T_g}=\mathrm{const}$.

II. Свойства линий $a\cdot\frac{1}{T_g}+b\cdot\nu=c$ (*) на поверхности.

1) Если отнести поверхность к линиям кривизны, то уравнение линий (*) имеет вид:

$$E\cdot\left(\frac{b}{R_2}-c\right)du^2+a\cdot\sqrt{Eg}\cdot\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)du\,dv+g\cdot\left(\frac{b}{R_1}-c\right)dv^2=0,$$

где E, g — коэффициенты линейного элемента поверхности, R_1, R_2 — радиусы главных кривизн поверхности.

2) Линии сети (*) располагаются в точке так, что алгебраическая сумма углов θ и ϑ, составляемых ими с соответственными линиями кривизны, остается постоянной: $\theta-\vartheta=\psi$.

3) Между нормальными кривизнами линий сети (*) существуют зависимости:

$$\nu_1+\nu_2=\frac{a^2}{a^2+b^2}\cdot I+\frac{2b\cdot c}{a^2+b^2} \quad \text{и} \quad \nu_1\cdot\nu_2=\frac{a^2}{a^2+b^2}\cdot K+\frac{c^2}{a^2+b^2},$$

где I и K — средняя и полная кривизны поверхности.

4) Нормальная кривизна поверхности по любому направлению выражается через нормальные кривизны линий сети $\frac{1}{T_g}=p$ следующим образом:

$$\frac{1}{R}=\frac{\sin^2\delta}{r_1}+\frac{\cos^2\delta}{r_2}+p\cdot\sin 2\delta,$$

где δ — угол, составляемый рассматриваемым направлением с направлением линии $\frac{1}{T_g}=p$. При $p=0$ получим формулу Euler'a:

$$\frac{1}{R}=\frac{\sin^2\vartheta}{R_1}+\frac{\cos^2\vartheta}{R_2}.$$

5) На поверхностях вида $R_1+R_2=\frac{2b}{c}$ сеть линий (*) является сопряженной.

Следствие. На развертывающейся поверхности линии $\frac{1}{T_g}:\nu=\text{const}$ пересекают прямолинейные образующие под постоянным углом.

6) На поверхностях $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{2c}{b}$ сеть линий (*) является ортогональной. В частности сеть линий $\frac{1}{T_g}:\nu=\text{const}$ ортогональна на минимальных поверхностях.

7) Линии сети (*) пересекают линии кривизны под постоянным углом на поверхностях, у которых главные нормальные кривизны связаны линейным соотношением.

8) На поверхностях $\frac{A}{R_1}-\frac{1}{R_2}=\frac{c\cdot(A-1)}{b}$, где $A=\text{const}$, изображение линий (*) на обе полости эволюты дает сопряженную сеть.

9) На поверхностях вида

$$\frac{\sqrt{R_2-\frac{b}{c}}+\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1-\frac{b}{c}}+\sqrt{R_1}}=\text{const} \quad \text{и}$$

$$\left(\sqrt{R_2-\frac{b}{c}}+\sqrt{R_2}\right)\left(\sqrt{R_1-\frac{b}{c}}+\sqrt{R_1}\right)=\text{const}$$

(и только на них из класса W) изображение сети линий (*) на обе полости эволюты дает ортогональную сеть.

В частности на поверхностях $K=\text{const}$ и $\frac{R_2}{R_1}=\text{const}$ изображение любой сети $\frac{1}{T_g}=\text{const}$ на обе полости эволюты дает ортогональную сеть.

Замечание. Автором рассмотрена более общая задача: *Найти свойства линии на поверхности, поверхностный триэдр которой неизменно связан с поверхностным триэдром другой линии.*

В частности если линия на поверхности имеет общую поверхностную нормаль с другой линией и поверхностные триэдры их неизменно связаны, то получаются линии $a\cdot\frac{1}{T_g}+b\cdot\frac{1}{\rho_g}=c$. Изложение этих результатов будет дано автором в ближайшем будущем.

Военно-морское инженерное училище
им. Дзержинского. Ленинград.

Поступило
10 VII 1938.