Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 6

МАТЕМАТИКА

А. Г. ПИНСКЕР

ОБ ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЕ В ПРОСТРАНСТВЕ HILBERT'а

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 21 VI 1938)

В настоящей заметке указывается общая форма непрерывного функционала в пространстве L^2 [функций $x(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, интегрируемых с квадратом], частично аддитивного в том смысле, что соотношение аддитивности $\Phi(x+y)=\Phi(x)+\Phi(y)$ выполняется для всякой пары элементов $x=x(t)$, $y=y(t)$, удовлетворяющих условию ортогональности

$$\int_a^b x(t)\, y(t)\, dt = 0.$$

Теорема 1. *Общий вид непрерывного функционала в L^2, аддитивного для ортогональных элементов, дается формулой*

$$\Phi(x)=\int_a^b \left[Ax^2(t)+x(t)\psi(t)\right] dt \quad \left| A=\mathrm{const},\ \psi(t) \in L^2 \right| . \tag{1}$$

Доказательство. Легко видеть, что формула (1) действительно определяет функционал в L^2, удовлетворяющий условиям теоремы.

Пусть теперь $\Phi(x)$ — функционал рассматриваемого вида. Рассмотрим элемент

$$x_e = x_e(t) = \left| \begin{array}{l} \xi \text{ для } t \in e \\ 0 \text{ вне } e \end{array} \right.$$

(e — произвольное измеримое множество из основного промежутка $[a, b]$) и положим

$$\Phi(x_e) = \varphi_e(\xi).$$

Пусть

$$x^* = x_{e,e'}(t) = \left| \begin{array}{l} \xi \text{ для } t \in e \\ \alpha \text{ для } t \in e' \\ 0 \text{ для } t \in c(e+e') \end{array} \right. \quad \text{и } y^* = y_{e,e'}(t) = \left| \begin{array}{l} \eta \text{ для } t \in e \\ -\alpha \text{ для } t \in e' \\ 0 \text{ для } t \in c(e+e') \end{array} \right.$$

где e и e' — измеримые множества без общих точек и

$$\xi\eta \operatorname{mes} e - \alpha^2 \operatorname{mes} e' = 0 .$$

Тогда в виду ортогональности элементов x^* и y^* и по аддитивности функционала

$$\Phi(x^*+y^*)=\Phi(x^*)+\Phi(y^*)$$

имеем следующее тождество, связывающее функции $\varphi_e(\xi)$ и $\varphi_e(\eta)$:

$$\varphi_e(\xi+\eta)=\varphi_e(\xi)+\varphi_e(\eta)+\varphi_{e'}(\alpha)+\varphi_{e'}(-\alpha). \tag{2}$$

1. Допустим, что функционал $\Phi(x)$—нечетный: $\Phi(-x)=-\Phi(x)$. В этом случае тождество (2) принимает вид:

$$\varphi_e(\xi+\eta)=\varphi_e(\xi)+\varphi_e(\eta).$$

Отсюда, если $\overline{x}(t)$ и $\overline{y}(t)$—любые конечнозначные функции, то $\overline{x}(t)=\xi_i$ и $\overline{y}(t)=\eta_i$ для $t\in e_i$ $(i=1,2,\ldots n)$ и потому

$$\Phi(\overline{x}+\overline{y})=\sum_{i=1}^{n}\varphi_{e_i}(\xi_i+\eta_i)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_{e_i}(\xi_i)+\sum_{i=1}^{n}\varphi_{e_i}(\eta_i)=\Phi(\overline{x})+\Phi(\overline{y}).$$

Итак, функционал $\Phi(x)$ аддитивен для конечнозначных функций, а по непрерывности аддитивен вообще и следовательно представляет собой линейный функционал:

$$\Phi(x)=\int_a^b x(t)\psi(t)\,dt, \quad |\,\psi(t)\in L^2\,|.$$

2. Допустим, что функционал $\Phi(x)$—четный:

$$\Phi(-x)=\Phi(x).$$

Положим в тождестве (2) $\alpha=\eta=\xi$ и $\operatorname{mes} e=\operatorname{mes} e'$; имеем

$$\varphi_{e'}(\xi)=\frac{1}{2}\left[\varphi_e(2\xi)-2\varphi_e(\xi)\right]; \tag{3}$$

аналогично, если множества e'' и e без общих точек и $\operatorname{mes} e''=\operatorname{mes} e$,

$$\varphi_{e''}(\xi)=\frac{1}{2}\left[\varphi_e(2\xi)-2\varphi_e(\xi)\right], \tag{3'}$$

т. е. $\varphi_{e'}(\xi)=\varphi_{e''}(\xi)$. В частности для двух интервалов d_1 и d_2 длины $\frac{1}{n}$ будет: $\varphi_{d_1}(\xi)=\varphi_{d_2}(\xi)$. Если e_1 и e_2—две системы интервалов с рациональными концами, то, разбивая их на интервалы подходящей длины $\frac{1}{n}$, найдем, что

$$\frac{1}{\operatorname{mes} e_1}\varphi_{e_1}(\xi)=\frac{1}{\operatorname{mes} e_2}\varphi_{e_2}(\xi);$$

по непрерывности же заключаем, что это верно для любых множеств, а потому

$$\frac{1}{\operatorname{mes} e}\varphi_e(\xi)=A(\xi). \tag{4}$$

Из соотношения (3) имеем

$$\varphi_e(2\xi)=2\varphi_e(\xi). \tag{5}$$

Положим теперь в тождестве (2) $\xi=\eta=1$, тогда

$$\operatorname{mes} e=\alpha^2\operatorname{mes} e' \quad \text{и} \quad \varphi_e(2)=2\varphi_e(1)+2\varphi_{e'}(\alpha)$$

или, принимая во внимание (4) и (5),

$$\varphi_{e'}(\alpha)=\varphi_e(1)=A(1)\operatorname{mes} e=A\alpha^2\operatorname{mes} e' \quad |\,A(1)=A\,|.$$

Пусть $x(t)$ конечнозначная функция: $x(t)=\alpha_i$ для $t\in e_i$ $(i=1,2\ldots n)$.

Имеем

$$\Phi(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{e_i}(\alpha_i) = A \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \operatorname{mes} e_i = A \int_a^b \bar{x}^2(t)\,dt$$

и по непрерывности функционала

$$\Phi(x) = A \int_a^b x^2(t)\,dt\,,$$

где $x = x(t)$—произвольный элемент пространства L^2.

3. Наряду с данным функционалом $\Phi(x)$ функционалами того же вида будут

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2}[\Phi(x) + \Phi(-x)] \quad \text{и} \quad \Phi_2(x) = \frac{1}{2}[\Phi(x) - \Phi(-x)]\,,$$

но так как $\Phi_1(x)$—четный функционал, а $\Phi_2(x)$—нечетный и $\Phi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x)$, то

$$\Phi(x) = \int_a^b [Ax^2(t) + x(t)\psi(t)]\,dt\,,$$

что и требовалось доказать.

Предыдущие рассуждения легко обобщаются на тот случай, когда значения операции $\Phi(x)$ принадлежат произвольному абстрактному линейному пространству Y, в котором определено понятие предела; а именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 1'. *Общий вид непрерывной и аддитивной для ортогональных элементов операции, переводящей L^2 в Y, дается формулой*

$$\Phi(x) = y_0 \int_a^b x^2(t)\,dt + U(x)\,,$$

где $y_0 \in Y$, а $U(x)$—линейная операция.

В виду изометричности пространств L^2 и l^2 имеют место аналогичные утверждения и для пространства l^2, а именно:

Теорема 2. *Общий вид непрерывного функционала $\Phi(x)$ в пространстве l^2, аддитивного для ортогональных пар элементов, дается формулой:*

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (A\xi_i^2 + a_i\xi_i)\,,$$

где

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)\,, \quad A = \text{const}\,, \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < +\infty\,.$$

Теорема 2'. *Общий вид непрерывной и аддитивной для ортогональных элементов операции, переводящей l^2 в Y, дается формулой:*

$$\Phi(x) = y_0 \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 + U(x)\,,$$

где $y_0 \in Y$, а $U(x)$—линейная операция.

Институт математики.
Ленинградский государственный университет.

Поступило
22 VI 1938.