Q. Chen, Z. Y. Li // Frontiers in Bioengineering and Biotechnology. – 2019. – Vol.7. – p.366. doi: 10.3389/fbioe.2019.00366

3. Марочник сталей и сплавов / Ю. Г. Драгунов [и др.] ; под общей ред. Ю. Г. Драгунова и А. С. Зубченко. – 4-е изд., переработ. и доп. – М. : Машиностроение, 2014. – 1216 с.

В. Ю. Златина
(ГГТУ имени П. О. Сухого, Гомель)
Науч. рук. **В. Ю. Гавриш**, канд. физ.-мат. наук, доцент

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ МЕТОДОМ ФУНКЦИИ ГРИНА

Введение. В работе изложена процедура получения дифференциального сечения рассеяния на кулоновском потенциале с использованием функции Грина. По результатам расчетов с использованием метода функции комплексной переменной получена формула Резерфорда.

Функция Грина свободной частицы. Известно [1], что свободная частица описывается уравнением Шредингера

$$\hat{H}_0 \ \psi_{\vec{k}}^0(\vec{r}) = E \ \psi_{\vec{k}}^0(\vec{r}), \tag{1}$$

где $\hat{H}_0$ – гамильтониан. В случае наличия оператора взаимодействия $\hat{V} = V(\vec{r})$ уравнение Шредингера примет вид

$$\left(\hat{H}_0 + \hat{V}\right) \psi(\vec{r}) = E \ \psi(\vec{r}). \tag{2}$$

Для простоты будем полагать, что взаимодействие исчезает на больших расстояниях от силового центра, т.е. $V(\vec{r} \to \infty) = 0$. Запишем уравнение (2) в виде

$$\left(\hat{H}_0 - E\right) \psi(\vec{r}) = -\hat{V} \ \psi(\vec{r}), \tag{3}$$

решение которого будем проводить методом функции Грина. Для этого перейдем от дифференциального уравнения Шредингера (3) к эквивалентному интегральному уравнению

$$\psi(\vec{r}) = \mathrm{e}^{i\vec{k}\vec{r}} + \int G_0(E,\vec{r},\vec{r}\,')\, V(\vec{r}\,')\psi(\vec{r}\,')d\vec{r}\,', \tag{4}$$

где $G_0(E,\vec{r},\vec{r}\,')$ – функция Грина, соответствующая оператору $\hat{H}_0$ и удовлетворяющая уравнению

$$\left(E - \hat{H}_0\right) G_0(E,\vec{r},\vec{r}\,') = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \tag{5}$$

с дельта-функцией Дирака $\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$ [2]. Легко убедиться, что если $G_0(E,\vec{r},\vec{r}\,')$ является функцией Грина, соответствующей оператору $\hat{H}_0$, то справедливо так называемое спектральное разложение или спектральное представление функции Грина

$$G_0(E,\vec{r},\vec{r}\,') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n^0(\vec{r})\psi^{*0}_{\;n}(\vec{r}\,')}{E_0 - E_n}, \tag{6}$$

которое в случае непрерывного спектра оператора $\hat{H}_0$ определяется интегралом вида

$$G_0(E,\vec{r},\vec{r}\,') = \int \frac{\psi_\chi^0(\vec{r})\psi^{*0}_{\;\chi}(\vec{r}\,')}{E_0 - E_n} \frac{d\vec{\chi}}{(2\pi)^3}. \tag{7}$$

Интеграл (7) вычислим с помощью техники вычетов [3]. Рассмотрим два способа обхода полюсов: добавим к положительной вещественной величине E_0 малую добавку $\pm i\varepsilon$. Соответствующие выражения для функции Грина обозначим индексами (+) или (–):

$$G_0^{(\pm)}(E,\vec{r},\vec{r}\,') = \lim_{\varepsilon\to 0} G_0(E \pm i\varepsilon,\vec{r},\vec{r}\,'), \tag{8}$$

вычисление которых приводит к

$$\begin{aligned} G_0^{(+)}(E,\vec{r},\vec{r}\,') &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{\mathrm{e}^{i|\vec{k}||\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, \\ G_0^{(-)}(E,\vec{r},\vec{r}\,') &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{\mathrm{e}^{-i|\vec{k}||\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}. \end{aligned} \tag{9}$$

Случай расходящейся волны соответствует $G_0^{(+)}(E,\vec{r},\vec{r}')$; с учетом (4) приходим к

$$\psi(\vec{r}) = \mathrm{e}^{i\vec{k}\vec{r}} - \int \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{\mathrm{e}^{i|\vec{k}||\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}')\psi(\vec{r}')d\vec{r}', \qquad (10)$$

откуда путем сравнения с общим выражением получаем [1], что амплитуда рассеяния определяется функцией Грина (10) и явным видом оператора взаимодействия $\hat{V} = V(\vec{r})$.

Упругое рассеяние на кулоновском потенциале. Определим выражение для дифференциального сечения на сферически-симметричном потенциале

$$V(|\vec{r}|) = Z_1 Z_2 \frac{e^2}{|\vec{r}|}, \qquad (11)$$

где Z_1, Z_2 – заряды мишени и налетающей частицы, e – элементарный заряд [1]. В случае упругого рассеяния, когда импульсы начальной и конечной частиц равны $|\vec{k}_0| = |\vec{k}|$, получаем

$$|\vec{k}_0 - \vec{k}| = \sqrt{k_0^2 + k^2 - 2|\vec{k}_0||\vec{k}|\cos\theta} = 2|\vec{k}|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \qquad (12)$$

Проводя интегрирование по телесному углу выражения для амплитуды рассеяния

$$f\left(\vec{k}',\vec{k}\right) = -\int \frac{m}{2\pi\hbar^2} e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{r}'} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} V(\vec{r}')d\vec{r}' \qquad (13)$$

с последующей подстановкой (13) в выражение для дифференциального сечения

$$d\sigma = \left| f\left(\vec{k}',\vec{k}\right)\right|^2 \, d\Omega \qquad (14)$$

приходим к

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z_1^2 Z_2^2 m^2}{\hbar^4 |\vec{k}_0 - \vec{k}|^2} \left| \int_0^\infty \sin\left(|\vec{k}_0 - \vec{k}|\, r'\right) dr' \right|^2. \qquad (15)$$

Для вычисления интеграла (15) воспользуемся следующим приемом:

$$\int_0^\infty \sin\left(|\vec{k}_0-\vec{k}\,|\,r'\right)dr' \Rightarrow \lim_{\lambda\to 0}\int_0^\infty e^{-\lambda r'}\sin\left(|\vec{k}_0-\vec{k}\,|\,r'\right)dr'. \qquad (16)$$

Используя комплексное представление тригонометрических функций [3], после некоторых преобразований из выражения (16) получаем

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_0^\infty e^{-\lambda r'}\frac{e^{i|\vec{k}_0-\vec{k}|r'}-e^{-i|\vec{k}_0-\vec{k}|r'}}{2i}dr' = \frac{1}{|\vec{k}_0-\vec{k}\,|}. \qquad (17)$$

Подстановка (17) в (15) приводит к

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{4Z_1^2Z_2^2}{\hbar^4\,|\vec{k}_0-\vec{k}\,|^4} \qquad (18)$$

или с использованием (12) окончательно получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{4Z_1^2Z_2^2}{16E^2}\sin^{-4}\left(\frac{\theta}{2}\right). \qquad (19)$$

Полученное выражение называют формулой Резерфорда [1].

Заключение. Работа посвящена методу функции Грина для задачи квантовой теории рассеяния. В ходе работы было получено выражение для рассеянной волны в борновском приближении.

Литература

1. Давыдов, А. С. Квантовая механика: учебное пособие / С. А. Давыдов. – Спб. : БХВ-Петербург, 2011. – 704 с.

2. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1967. – 436 с.

3. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 749 с.