Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 1

МАТЕМАТИКА

С. СОБОЛЕВ, член-корреспондент Академии Наук СССР

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

В настоящей заметке мы докажем одну теорему функционального анализа, полезную в теории дифференциальных уравнений с частными производными. В следующей заметке мы покажем, как этот результат применяется например в теории квази-линейных уравнений гиперболического типа с n переменными.

Рассмотрим некоторую область D n-мерного пространства, каждая точка M которой достижима с помощью шарового сектора V_M постоянной величины и формы, лежащего целиком внутри D (D может быть и неограниченной).

Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая функция переменных $x_1, \ldots, x_n$, суммируемая в D. Мы будем называть суммируемую функцию $\omega_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(x_1, \ldots, x_n)$ производной от φ и обозначать:

$$\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}} = \omega_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}, \tag{1}$$

если справедливо следующее:

Какова бы ни была функция $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, имеющая непрерывные производные до порядка α включительно и отличная от нуля лишь в некоторой области D', внутренней по отношению к D, имеет место формула:

$$\overbrace{\int \cdots \int_D}^{n} [\psi\, \omega_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} + (-1)^\alpha \varphi \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}}]\, dx_1, \ldots, dx_n. \qquad (2)^*$$

Справедлива следующая теорема.

Основная теорема I. *Если все производные порядка l от данной функции суммируемы в области D со степенью p, где $p \leqslant \frac{n}{l}$, то сама функция суммируема в этой области со степенью q, где*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{l}{n}. \tag{3}$$

* Если производная от φ в классическом смысле существует и непрерывна, то наше определение совпадает с классическим. Оно не совпадает с требованием существования производной почти везде. [Тривиальные примеры: 1) $\varphi = f_1(x_1) + f_2(x_2)$, при этом по нашему определению $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$, а в обычном смысле производная может не существовать; 2) $\varphi = F(x_1)$, где F — не абсолютно непрерывная функция, при этом нет производной в нашем смысле.]

Интеграл

$$\overbrace{\int\cdots\int_D}^{n}|\varphi|^q\,dx_1,\ldots,dx_n \tag{4}$$

может при этом быть оценен через интегралы от любой более низкой степени r *от* φ *следующим образом:*

$$\left[\overbrace{\int\cdots\int_D}^{n}|\varphi|^q\,dx_1,\ldots,dx_n\right]^{\frac{1}{q}} \leqslant L_1\left[\overbrace{\int\cdots\int_D}^{n}|\varphi|^r\,dx_1,\ldots,dx_n\right]^{\frac{1}{r}}+$$

$$+L_2\left[\overbrace{\int\cdots\int_D}^{n}\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\left|\frac{\partial^l\varphi}{dx_1^{\alpha_1},\ldots,dx_n^{\alpha_n}}\right|^p dx_1,\ldots,dx_n\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{5}$$

где числа L_1 *и* L_2 *зависят лишь от* p, q, r *и* n, *но не зависят от выбора функции* φ.

Случай, когда $p>\frac{n}{l}$, был при $p=2$ разобран автором [1, 2], а для любого p В. И. Кондрашовым [3]. При этом оказывается, что функция φ будет ограниченной непрерывной функцией.

Доказательство этой теоремы проводится сначала для функций φ, имеющих непрерывные производные в обычном смысле слова. После того как неравенство (4) для таких функций установлено, можно воспользоваться методом средних функций [4].

Для любой суммируемой функции φ строится последовательность:

$$\varphi_m=C_1m^n\overbrace{\int\cdots\int_{r\leqslant\frac{1}{m}}}^{n} e^{\frac{m^2r^2}{m^2r^2-1}}\varphi(x_1',\ldots,x_n')\,dx_1',\ldots,dx_n', \tag{6}$$

$$r=\sqrt{\sum(x_i-x_i')^2}.$$

Доказывается, что эта последовательность стремится к φ почти везде и кроме того во всех пространствах L_p, к которым принадлежит φ. Функцию φ_m мы будем называть средней функцией от φ. При этом производная от средней функции равна средней функции от производной, если производную понимать в том смысле, как это определено выше.

Предельный переход в формуле (5) в общем случае дает теорему I.

Существенным элементом доказательства является следующая теорема.

Теорема II (обобщенная теорема Ф. Риса).

Если $g(x_1,\ldots,x_n)$ — *функция, суммируемая со степенью* p, *а* $h(y_1,\ldots,y_n)$ — *функция, суммируемая со степенью* q, *и* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$, *то имеет место неравенство:*

$$\int\cdots\int\int\cdots\int\frac{g(x_1,\ldots,x_n)\,h(y_1,\ldots,y_n)}{r^\lambda}dx_1,\ldots,dx_n\,dy_1,\ldots,dy_n\leqslant$$

$$\leqslant K\left[\int\cdots\int|g|^p\,dx_1,\ldots,dx_n\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int\cdots\int|h|^q\,dy_1,\ldots,dy_n\right]^{\frac{1}{q}}, \tag{7}$$

где

$$\lambda = n\left(2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right), \tag{8}$$

а K не зависит от g и h (5).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству Риса. Прежде всего устанавливается лемма.

Лемма I. *Пусть $g(x_1, \ldots, x_n)$ — какая-нибудь измеримая функция точки $x_1, \ldots, x_n$. Обозначим через $g^*(x_1, \ldots, x_n)$ функцию, зависящую только от $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, невозрастающую и притом такую, что $m(g > A) = m(g^* > A)$ для любых A. Тогда имеет место неравенство*

$$\begin{aligned} I = \int \ldots \int\int \ldots \int g(x_1, \ldots, x_n)\, h(y_1, \ldots, y_n)\, \cdot \\ \cdot\, f(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)\, dx_1, \ldots, dx_n\, dy_1, \ldots, dy_n \leqslant \\ \leqslant \int \ldots \int\int \ldots \int g^*(x_1, \ldots, x_n)\, h^*(y_1, \ldots, y_n)\, \cdot \\ \cdot\, f^*(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)\, dx_1, \ldots, dx_n\, dy_1, \ldots, dy_n. \end{aligned} \tag{9}$$

Эта лемма, как и соответствующая лемма Риса, сводится к случаю, где все три функции принимают лишь значения 0 и 1.

Для одного переменного это неравенство установлено в этом случае Рисом. Переход к случаю многих переменных можно совершить посредством операции симметризации Штейнера и операции округления Шварца. Предполагая неравенство (9) установленным для $(n-1)$ переменного, мы выделим отдельно внешнее интегрирование по одной паре переменных x_i, y_i и преобразуем интеграл с помощью округления каждого из множеств, где $f=1$, $g=1$ или $h=1$, отчего его величина не уменьшится. Прибавляя к этому процессу еще симметризацию, мы, как показано например у Люстерника (6), придем к доказательству леммы сначала для рассматриваемого частного случая, а затем, следуя Рису, и в общем виде. Укажем еще одну вспомогательную лемму.

Лемма II. *Пусть $x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$, $x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}$ — две каких-либо точки пространства. Пусть*

$$r_1 = \sqrt{\sum (x_i - x_i^{(1)})^2}, \quad r_2 = \sqrt{\sum (x_i - x_i^{(2)})^2}, \quad r = \sqrt{\sum (x_i^{(1)} - x_i^{(2)})^2}.$$

Далее пусть $g(r_1)$ — положительная невозрастающая функция от r_1 а $h(r_2)$ — положительная невозрастающая функция от r_2; тогда имеет место неравенство:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\substack{r_1 \leqslant r \\ r_2 \leqslant r}} \ldots \int g(r_1)\, h(r_2)\, dx_1, \ldots, dx_n \leqslant \\ \leqslant K r^{-n} \int\limits_{\substack{r_1 \leqslant r \\ r_2 \leqslant r}} \ldots \int g(r_1)\, dx_1, \ldots, dx_n \int h(r_2)\, dx_1, \ldots, dx_n, \end{aligned} \tag{10}$$

где K — постоянная.

Неравенство (10) есть обобщение классического неравенства Чебышева:

$$\int\limits_a^b g(x)\, h(x)\, dx \leqslant \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b g(x)\, dx \int\limits_a^b h(x)\, dx, \tag{11}$$

где $g(x)$ и $h(x)$ — различно направленные функции (одна не возрастает, а другая не убывает). Доказательство леммы II заключается в применении некоторой криволинейной системы координат, а также неравенства Чебышева (11), при оценке отдельно интеграла по части области, где $r_1 \geqslant r_2$, и по части, где $r_1 < r_2$.

Мы используем также одно неравенство Гарди [7].

$$\int\limits_0^\infty x^{-\alpha p} \Big(\int\limits_0^x y^{1-\alpha} f(y)\, dy \Big)^p dx \leqslant \Big(\frac{p}{\alpha p - 1} \Big)^p \int\limits_0^\infty f(y)^p\, dy. \tag{12}$$

Для того чтобы доказать теорему II в случае невозрастающих $g^*(r_1)$ и $h^*(r_2)$, мы разобьем все $2n$-мерное пространство $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ на три области:

$$D_1(r > r_1, r > r_2), \quad D_2(r_1 > r, r_1 > r_2) \text{ и } D_3(r_2 > r, r_2 > r_1).$$

Выполняя в D_1 внешнее интегрирование по $z_i = x_i - y_i$, в D_2 — по $x_1, \ldots, x_n$, а в области D_3 — по $y_1, \ldots, y_n$, мы каждый раз при оценке внутреннего интеграла будем находиться в условиях применимости леммы II. Пользуясь этим, получим:

$$I^* \leqslant K_1 \int\limits_0^\infty r^{-\lambda-1} \Big[\int\limits_0^r g^*(r_1) r_1^{n-1} dr_1 \Big] \Big[\int\limits_0^r h^*(r_2) r_2^{n-1} dr_2 \Big] dr +$$

$$+ K_2 \int\limits_0^\infty g^*(r_1) r_1^{n-\lambda-1} \Big[\int\limits_0^{r_1} h^*(r_2) r_2^{n-1} dr_2 \Big] dr_1 +$$

$$+ K_2 \int\limits_0^\infty h^*(r_2) r_2^{n-\lambda-1} \Big[\int\limits_0^{r_2} g^*(r_1) r_1^{n-1} dr_1 \Big] dr_2. \tag{13}$$

Остальное доказательство сводится к повторению mutatis mutandis рассуждений Риса.

Из теоремы II известным способом следует

Теорема III. *Если $h(y_1, \ldots, y_n)$ — некоторая функция, суммируемая со степенью $p > 1$, то интеграл:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \int \ldots \int\limits_\infty \frac{h(y_1, \ldots, y_n)}{r^\lambda} dy_1, \ldots, dy_n, \tag{14}$$

где

$$\lambda < \frac{n}{p'} = n\Big(1 - \frac{1}{p}\Big),$$

представляет собой функцию, суммируемую со степенью q, где

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\lambda}{n} - 1.$$

Переходим к доказательству теоремы I.

Значение функции $\varphi(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ (в случае ее непрерывности) представляется в виде:

$$\varphi(x_1^0, \ldots, x_n^0) = N \int \ldots \int\limits_{V_M} \Big\{ \frac{\partial^l \varphi}{\partial r^l} (-1)^l \frac{r^{l-n}}{(l-1)!} \psi\Big(\frac{r}{h}\Big) +$$

$$+ \frac{\varphi}{r^{n-1}} \frac{\partial^l}{\partial r^l} \Big[\frac{r^{l-1}}{(l-1)!} \psi\Big(\frac{r}{h}\Big) \Big] \Big\} \chi\Big(\frac{\vartheta_1}{\alpha}\Big) dx_1, \ldots, dx_n, \tag{15}$$

где N — постоянная, h — радиус сектора $V_м$, 2α — его угол растворения, ϑ_1 — полярная координата,

$$\chi(\xi)=0 \text{ при } \xi>1, \quad \psi(\xi)=\begin{cases} 0 & \xi \geqslant \frac{2}{3}. \\ 1 & \xi \leqslant \frac{1}{3}, \end{cases}$$

χ и ψ можно предположить неограниченно дифференцируемыми.

Применяя к (15) доказанную теорему III, получим основную теорему I.

Из теоремы I вытекает следствие, важное для приложений.

Пусть $F(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$ — непрерывная функция переменных $x_1, \ldots, x_n$ с параметрами $y_1, \ldots, y_m$. При этом пусть производные ее до порядка в l по параметрам $y_1, \ldots, y_m$ также непрерывны, а производные

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}}\left(\frac{\partial^\beta F}{\partial y_1^{\beta_1}, \ldots, \partial y_m^{\beta_m}}\right)$$

суммируемы со степенью $p \geqslant \frac{n}{l}$. Будем говорить при этом, что функция F обладает T) свойством. Тогда справедлива

Теорема IV. *Если в функцию $F(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$, обладающую T) свойством, подставить $y_i=\psi_i(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_k)$, где ψ_i также обладают T) свойством, то результат:*

$$\overline{\Phi}(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_k)=F(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$$

будет снова функцией, обладающей T) свойством.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
7 V 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] ДАН, I (X), № 7 (84), 289 (1936). [2] Матем. сб., **44 (2)**, 3, 465. [3] ДАН, XVIII, № 4—5 (1938). [4] С. Соболев, Тр. МИ, IX, 29. [5] F. Risz, Journ. of Lond. Math. Soc., V, 3, № 19, 162 (1930). [6] Л. Люстерник, DAH, III (VIII), № 2 (62), 55 (1935). [7] Hardy Littlewood and Polya, Inequalities, p. 289—290, § 382 (1934).