Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 1

МАТЕМАТИКА

Б. ФУКС

О ЛОКАЛЬНО ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 16 IV 1938)

1. Пусть $\mathfrak{B}$ — однолистная область пространства n комплексных переменных $z^1, z^2, \ldots, z^n$ $(z^k = x^k + iy^k)$.

В этой области, согласно С. Бергману, может быть определена (в связи с некоторой минимальной задачей) кернфункция $K(z, \bar{z}) = K(z^1, \ldots, z^n, \overline{z^1}, \ldots, \overline{z^n})$ этой области $\mathfrak{B}$ (1). С ее помощью определяется в $\mathfrak{B}$ риманова метрика, остающаяся инвариантной при псевдоконформных отображениях области $\mathfrak{B}$:

$$ds^2 = T_{m\bar{k}}\, dz^m\, d\bar{z}^k; \quad T_{m\bar{k}} = \frac{\partial^2 \lg K}{\partial z^m\, \partial \bar{z}^k}. \tag{1}$$

[(1) является положительной, определенной эрмитовой формой; под псевдоконформным отображением $w^k = f^k(z^1, \ldots, z^n)$ понимается взаимно однозначное отображение области $\mathfrak{B}$ через n аналитических в $\mathfrak{B}$ функций.]

Рассмотрим далее однолистную область $\mathfrak{B}^*$ в пространстве переменных w^k; пусть $K^*(w, \bar{w})$ — кернфункция области $\mathfrak{B}^*$, а форма

$$ds^2 = S_{m\bar{k}}\, dw^m\, d\bar{w}^k; \quad S_{m\bar{k}} = \frac{\partial^2 \lg K^*}{\partial w^m\, \partial \bar{w}^k} \tag{2}$$

определяет в $\mathfrak{B}^*$ инвариантную метрику.

Условимся $w^k = f^k(z^1, \ldots, z_n)$ называть локально изометрическим отображением области $\mathfrak{B}$ в точке $M(a^1, \ldots, a^n)$ на область $\mathfrak{B}^*$ в точке $P(b^1, \ldots, b^n)$, если такое отображение переводит точку M в P и некоторую окрестность точки M отображает псевдоконформно на некоторую окрестность точки P так, что

$$S_{m\bar{k}} = T_{q\bar{r}} \frac{\partial z^q}{\partial w^m} \frac{\partial \overline{z^r}}{\partial \overline{w^k}}. \tag{3}$$

Частным случаем такого отображения является псевдоконформное отображение области $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{B}^*$. В настоящей заметке мы указываем критерии существования локально изометрических отображений одной области на другую.

2. Обычные условия эквивалентности форм (1) и (2) представляют собой условия интегрируемости уравнений (3), которые сводятся к бес-

конечной системе равенств. Наш результат получается при использовании репрезентативных координат [2, 3].

Пусть будут

$$u^k = T^{k\bar{r}}_{(M)} \frac{\partial \lg M(z, \bar{a})}{\partial \overline{a^r}}; \quad v^k = S^{k\bar{r}}_{(P)} \frac{\partial \lg M^*(w, \bar{b})}{\partial \overline{b^r}} \tag{4}$$

репрезентативные координаты для областей $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^*$ относительно точек M, P соответственно. Здесь $M(z, a) = K(z, \bar{a}) / K(a, \bar{a})$ — минимальная функция [1] области $\mathfrak{B}$, $M^*(w, \bar{b})$ — области $\mathfrak{B}^*$; индексы (M), (P) обозначают, что соответствующие величины вычисляются в соответствующих точках.

Далее $\tau_{m\bar{k}} = T_{m\bar{k}}(z, \bar{a})$; $\sigma_{m\bar{k}} = S_{m\bar{k}}(w, \bar{b})$.

Тогда могут быть доказаны такие теоремы:

Т е о р е м а 1. *Если существует локально изометрическое отображение области $\mathfrak{B}$ в точке M на область $\mathfrak{B}^*$ в точке P, то такое отображение может быть представлено в виде*

$$u^k = \alpha^k_s v^s. \tag{5}$$

Здесь α^k_s — надлежащим образом подобранные постоянные.

Эта теорема получается интегрированием (3) и представляет собой обобщение одной теоремы Велке [4] на случай локально изометрических отображений.

Т е о р е м а 2. *Необходимым и достаточным условием для существования локально изометрического отображения области $\mathfrak{B}$ в точке M на область $\mathfrak{B}^*$ в точке P является существование таких постоянных γ^k_l, что*

$$A^{l\bar{q}}_{k\bar{r}} \gamma^k_l \overline{\gamma^r_q} = 1. \tag{6}$$

Здесь

$$A^{l\bar{q}}_{k\bar{r}} = \sigma^{n\bar{q}} S^{(P)}_{\underline{nm}} \overline{\sigma^{m\bar{r}}} \tau_{p\bar{r}} T^{p\bar{s}}_{(M)} \overline{\tau_{s\bar{k}}}. \tag{7}$$

Фиксируя точку M, мы получаем критерий для существования локально изометрических отображений области $\mathfrak{B}$ в точке M на $\mathfrak{B}^*$ вообще в виде возможности подбора величин γ^k_l, b^k, удовлетворяющих условиям (6).

Воронежский государственный
университет.

Поступило
17 IV 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. B e r g m a n n, Crelles Journal, **169**, 1—40 (1932). [2] S. B e r g m a n n, Math. Annalen, **102**, 430—446 (1929). [3] B. F u c h s, Rec. Math., **2 (44)**, fasc. 3. [4] W e l k e, Math. Annalen, **103** (1930).