Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

П. М. РИЗ

ВТОРИЧНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ КРУЧЕНИИ КРУГЛОГО ЦИЛИНДРА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 23 V 1938)

В настоящей заметке идет речь о тех явлениях, возникающих при кручении круглого цилиндра, которые не могут быть обнаружены в рамках линейной теории упругости, отбрасывающей квадраты производных от перемещений. Эта задача решалась Seth'ом ([1]), но в предположении справедливости закона Гука в форме:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \sum_{\alpha=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\alpha} + 2G\varepsilon_{xx}, \\ \sigma_{xy} &= G\varepsilon_{xy}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где ε_{xx}, ε_{xy} — компоненты деформации, отнесенной к окончательному состоянию. В совместной работе автора настоящей заметки и Н. В. Зволинского ([2]) было показано, что при сохранении членов второго порядка относительно производных от перемещений уже нельзя пользоваться законом Гука в форме (1), и был предложен метод для решения соответствующих задач *. В данной работе принимается постановка задачи, данная Seth'ом, но применяется метод, описанный в нашей цитированной работе.

Принимаем следующие предположения о перемещениях:

$$\left.\begin{aligned} u &= x\,[1-\beta(r)\cos\tau z] - y\beta(r)\sin\tau z, \\ v &= y\,[1-\beta(r)\cos\tau z] + x\beta(r)\sin\tau z, \\ w &= \tau^2\alpha z, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

равносильные следующим предположениям: поперечные сечения остаются плоскими; угол закручивания пропорционален z; боковая поверхность снова переходит в поверхность круглого цилиндра измененного радиуса (x, y, z — координаты окончательного состояния).

Решаем задачу, сохраняя члены порядка не выше, чем τ^2, и полагаем:

$$\beta = 1 + \tau^2\varphi(r).$$

* Метод в значительной мере основывается на результатах, полученных Murnaghan'ом ([3]).

Получаем следующие выражения для компонентов деформации:

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{xx}=-\tau^2\left(\varphi+\frac{x^2}{r}\varphi'\right); \quad \varepsilon_{yy}=-\tau^2\left(\varphi+\frac{y^2}{r}\varphi'\right); \quad \varepsilon_{zz}=\tau^2\left(\alpha-\frac{r^2}{2}\right);\\ &\varepsilon_{xy}=-xy\frac{2\tau^2\varphi'}{r}; \qquad \varepsilon_{xz}=-\tau y; \qquad \varepsilon_{yz}=\tau x.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Отсюда методом, описанным в нашей цитированной работе, находим напряжения:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xx}&=\lambda\tau^2\left[\alpha-\left(r\varphi'+2\varphi+\frac{r^2}{2}\right)\right]-2G\tau^2\left(\varphi+\frac{x^2\varphi'}{r}\right)-\\ &\quad-\frac{m}{4}\tau^2r^2-\frac{n}{4}\tau^2x^2-G\tau^2y^2;\\ \sigma_{yy}&=\lambda\tau^2\left[\alpha-\left(r\varphi'+2\varphi+\frac{r^2}{2}\right)\right]-2G\tau^2\left(\varphi+\frac{y^2\varphi'}{2}\right)-\\ &\quad-\frac{m}{4}\tau^2r^2-\frac{n}{4}\tau^2y^2-G\tau^2x^2;\\ \sigma_{zz}&=\lambda\tau^2\left[\alpha-\left(r\varphi'+2\varphi+\frac{r^2}{2}\right)\right]+2G\tau^2\left(\alpha-\frac{r^2}{2}\right)-\\ &\quad-\frac{m}{4}\tau^2r^2-G\tau^2r^2;\\ \sigma_{xy}&=-\tau^2xy\left[\left(\frac{2\varphi'}{r}-1\right)G+\frac{n}{2}\right];\\ \sigma_{xz}&=-G\tau y;\\ \sigma_{yz}&=G\tau x.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Здесь $m=-G\frac{9-12\nu}{1-2\nu}$; $n=9G$; ν — коэффициент Пуассона.

Первое и второе уравнения равновесия приводятся к следующему:

$$\varphi''+\frac{3\varphi'}{r}=A, \tag{5}$$

где $A=-\frac{7-16\nu}{4(1-\nu)}$; частное решение, нормированное условием $\varphi(0)=0$, дает

$$\varphi=\frac{Ar^2}{8}. \tag{6}$$

Третье уравнение равновесия удовлетворяется автоматически.

Граничные условия для боковой поверхности, свободной от напряжений, позволяют определить константу α:

$$\alpha=-\frac{3+3\nu-12\nu^2}{8(1-\nu)(1-2\nu)}R^2, \tag{7}$$

где R — радиус деформированного цилиндра. Для величины τ и крутящего момента M, естественно, получается обычное соотношение:

$$M=G\tau\iint(x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

но только интеграл выражает уже момент инерции деформированного сечения. Чтобы осуществить заданные перемещения, на торцах цилиндра следует распределить нормальные напряжения:

$$\sigma_{zz}=\tau^2(Br^2-CR^2), \tag{8}$$

причем $B=\frac{G(1+10\nu-20\nu^2)}{4(1-\nu)(1-2\nu)}$; $C=\frac{3G(1+\nu-4\nu^2)}{4(1-2\nu)^2}$.

Из изложенного следует, что: 1) закрученный цилиндр сжимается по оси, это сжатие характеризуется константой α.

2) Радиус цилиндра при закручивании увеличивается в отношении

$$\frac{R_0}{R} = 1 - \tau^2 \frac{7 - 16\nu}{32(1-\nu)} R^2. \tag{9}$$

В заключение отметим, что, несмотря на усложнение закона Гука по сравнению с принятым Seth'ом, уравнение равновесия и все основные формулы получаются более простыми. Мы не приводим здесь детального сравнения наших результатов с результатами Seth'a; отметим только, что изменение радиуса получается у Seth'a пропорциональным четвертой степени $R\tau$.

Механико-машиностроительный институт им. Баумана.

Поступило 26 V 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Seth, Phil. Trans. Roy. Soc. A, **234**, 231 (1935). [2] Н. В. Зволинский и П. М. Риз, ДАН, XX, № 2—3 (1938). [3] Murnaghan, Am. Journ. of Math,, LIX, № 2 (1937).