Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Д. Ю. ПАНОВ

О КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЕЙ, БЛИЗКИХ К ПРИЗМАТИЧЕСКИМ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 3 V 1938)

1. В этой заметке мы даем решение задачи о кручении непризматического тела, которое позволяет провести эффективным образом необходимые вычисления. Возможность такого решения приобретается, конечно, ценой некоторых ограничений: мы предполагаем, что исследуемое нами тело мало отличается от призматического. С точки зрения практики такое ограничение вполне естественно; оно выполняется, например, для лопасти воздушного винта. Ниже будут сформулированы более точно те предположения, которые мы сделаем, чтобы реализовать это ограничение.

2. Мы рассматриваем тело S, ограниченное в прямоугольной декартовой системе координат поверхностью

$$f[x(1-kz),\ y(1-kz)]=0 \tag{1}$$

и двумя плоскостями, перпендикулярными к оси oz. В уравнении (1) через k обозначен параметр, квадратами и более высокими степенями которого мы будем пренебрегать. Предполагается, кроме того, что для всего рассматриваемого нами тела

$$1-kz>0.$$

Полагая

$$\begin{aligned}\xi&=x(1-kz),\\ \eta&=y(1-kz),\\ \zeta&=z,\end{aligned} \tag{2}$$

можем свести решение задачи для тела S к решению задачи для призматического тела, боковая поверхность которого определяется уравнением

$$f(\xi,\eta)=0. \tag{3}$$

Мы будем решать задачу кручения для тела S; в связи с этим нам надо установить смысл термина к р у ч е н и е в применении к деформации этого тела.

Кручением призматического тела называют, как известно, такую его деформацию, которая соответствует напряженному состоянию, характеризуемому равенствами

$$X_x=Y_y=Z_z=X_y=0$$

и отсутствием как объемных сил, так и напряжений на боковой поверхности. Касательные напряжения X_z и Y_z дают при этом момент относительно оси стержня и предполагаются распределенными по основаниям так же, как и в каждом сечении.

Имея в виду рассмотреть кручение непризматического тела, мы условимся понимать под его кручением такую деформацию, которая при $k=0$ превращается в кручение соответствующего призматического тела. Напряжения на поверхности будут предполагаться отсутствующими, напряжения же по основаниям такими, какими они получатся из решения задачи. Можно показать, что для той задачи, которую мы рассматриваем, существует лишь одно такое решение.

3. Преобразуя обычные уравнения теории упругости, написанные в перемещениях, при помощи замены переменных (2) мы получаем с точностью до k^2:

$$\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}+\mu\Delta U &= k\Big[(\lambda+\mu)\Big(2\zeta\frac{\partial^2U}{\partial\xi^2}+2\zeta\frac{\partial^2V}{\partial\xi\partial\eta}+\zeta\frac{\partial^2W}{\partial\xi\partial\zeta}+\\
&+\eta\frac{\partial^2W}{\partial\xi\partial\eta}+\xi\frac{\partial^2W}{\partial\xi^2}+\frac{\partial W}{\partial\xi}\Big)+2\mu\Big(\zeta\frac{\partial^2U}{\partial\xi^2}+\\
&+\zeta\frac{\partial^2U}{\partial\eta^2}+\xi\frac{\partial^2U}{\partial\xi\partial\zeta}+\eta\frac{\partial^2U}{\partial\eta\partial\zeta}\Big)\Big];\\
(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial\eta}+\mu\Delta V &= k\Big[(\lambda+\mu)\Big(2\zeta\frac{\partial^2U}{\partial\xi\partial\eta}+2\zeta\frac{\partial^2V}{\partial\eta^2}+\zeta\frac{\partial^2W}{\partial\eta\partial\zeta}+\\
&+\xi\frac{\partial^2W}{\partial\xi\partial\eta}+\eta\frac{\partial^2W}{\partial\eta^2}+\frac{\partial W}{\partial\eta}\Big)+2\mu\Big(\zeta\frac{\partial^2V}{\partial\xi^2}+\\
&+\zeta\frac{\partial^2V}{\partial\eta^2}+\xi\frac{\partial^2V}{\partial\xi\partial\zeta}+\eta\frac{\partial^2V}{\partial\eta\partial\zeta}\Big)\Big];\\
(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial\zeta}+\mu\Delta W &= k\Big[(\lambda+\mu)\Big(\zeta\frac{\partial^2U}{\partial\xi\partial\zeta}+\eta\frac{\partial^2U}{\partial\xi\partial\eta}+\xi\frac{\partial^2U}{\partial\xi^2}+\\
&+\frac{\partial U}{\partial\xi}+\zeta\frac{\partial^2V}{\partial\eta\partial\zeta}+\xi\frac{\partial^2V}{\partial\xi\partial\eta}+\eta\frac{\partial^2V}{\partial\eta^2}+\\
&+\frac{\partial V}{\partial\eta}+2\xi\frac{\partial^2W}{\partial\xi\partial\zeta}+2\eta\frac{\partial^2W}{\partial\eta\partial\zeta}\Big)+2\mu\Big(\zeta\frac{\partial^2W}{\partial\xi^2}+\\
&+\zeta\frac{\partial^2W}{\partial\eta^2}+\xi\frac{\partial^2W}{\partial\xi\partial\zeta}+\eta\frac{\partial^2W}{\partial\eta\partial\zeta}\Big)\Big].
\end{aligned}\tag{4}$$

Здесь через U, V и W обозначены перемещения u, v и w в координатах ξ, η и ζ. В качестве граничных условий мы получим на поверхности (3):

$$\begin{aligned}
\lambda\Theta\cos\alpha+\mu\Big(\frac{\partial U}{\partial\nu}+\frac{\partial U}{\partial\xi}\cos\alpha+\frac{\partial V}{\partial\xi}\cos\beta\Big) &= k\Big[\lambda\cos\alpha\Big(\zeta\frac{\partial U}{\partial\xi}+\zeta\frac{\partial V}{\partial\eta}+\\
&+\xi\frac{\partial W}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial W}{\partial\eta}\Big)+\mu\Big(2\zeta\frac{\partial U}{\partial\xi}\cos\alpha+\zeta\frac{\partial U}{\partial\eta}\cos\beta+\\
&+\xi\frac{\partial U}{\partial\zeta}\cos\alpha+\eta\frac{\partial U}{\partial\zeta}\cos\beta+\zeta\frac{\partial V}{\partial\xi}\cos\beta+\xi\frac{\partial W}{\partial\xi}\cos\alpha+\\
&+\eta\frac{\partial W}{\partial\xi}\cos\beta\Big)\Big];
\end{aligned}$$

$$\lambda\Theta\cos\beta+\mu\left(\frac{\partial V}{\partial\nu}+\frac{\partial U}{\partial\eta}\cos\alpha+\frac{\partial V}{\partial\eta}\cos\beta\right)=k\left[\lambda\cos\beta\left(\zeta\frac{\partial U}{\partial\xi}+\zeta\frac{\partial V}{\partial\eta}+\right.\right.$$
$$+\xi\frac{\partial W}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial W}{\partial\eta}\Big)+\mu\Big(\zeta\frac{\partial V}{\partial\xi}\cos\alpha+2\zeta\frac{\partial V}{\partial\eta}\cos\beta+$$
$$+\xi\frac{\partial V}{\partial\zeta}\cos\alpha+\eta\frac{\partial V}{\partial\zeta}\cos\beta+\zeta\frac{\partial U}{\partial\eta}\cos\alpha+\xi\frac{\partial W}{\partial\eta}\cos\alpha+$$
$$\left.\left.+\eta\frac{\partial W}{\partial\eta}\cos\beta\right)\right];$$
$$\mu\left(\frac{\partial W}{\partial\nu}+\frac{\partial U}{\partial\zeta}\cos\alpha+\frac{\partial V}{\partial\zeta}\cos\beta\right)=k\Big[\lambda\Theta(\xi\cos\alpha+\eta\cos\beta)+$$
$$+\mu\Big(\zeta\frac{\partial W}{\partial\xi}\cos\alpha+\zeta\frac{\partial W}{\partial\eta}\cos\beta+2\xi\frac{\partial W}{\partial\zeta}\cos\alpha+$$
$$+2\eta\frac{\partial W}{\partial\zeta}\cos\beta+\xi\frac{\partial U}{\partial\xi}\cos\alpha+\eta\frac{\partial U}{\partial\eta}\cos\alpha+\xi\frac{\partial V}{\partial\xi}\cos\beta+$$
$$\left.\left.+\eta\frac{\partial V}{\partial\eta}\cos\beta\right)\right]. \qquad (5)$$

Можно показать, что системе уравнений (4) и граничных условий (5) удовлетворяют с точностью до k^2 такие функции U, V и W:

$$U=-\tau\eta\zeta+k\tau\left\{\Phi\xi-\frac{1}{2}(\eta\xi^2+\eta^3)+\eta\zeta^2-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left[\int^{\xi}\Phi d\xi+h_1(\eta)\right]\right\};$$
$$V=\tau\xi\zeta+k\tau\left\{\Phi\eta+\frac{1}{2}(\xi\eta^2+\xi^3)-\xi\zeta^2-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left[\int^{\eta}\Phi d\eta+h_2(\xi)\right]\right\};$$
$$W=\tau\Phi-2k\tau\zeta\Phi.$$

В этих формулах через $\Phi=\Phi(\xi,\eta)$ обозначена функция кручения для контура (3), а функции $h_1(\eta)$ и $h_2(\xi)$ подобраны так, что

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\int^{\xi}\Phi d\xi+h_1(\eta)\right]+\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\int^{\eta}\Phi d\eta+h_2(\xi)\right]=0;$$

это возможно в силу свойств функции $\Phi(\xi,\eta)$.

Переходя к координатам x, y, z, мы получаем следующие точные до k^2 выражения для перемещений при кручении тела S:

$$u=-\tau yz(1-2kz)-\frac{1}{2}k\tau y(x^2+y^2)+k\tau\left\{x\Phi(x,y)-\right.$$
$$\left.-(1-2\sigma)\left[\int^{x}\Phi(x,y)\,dx+h_1(y)\right]\right\};$$
$$v=\tau xz(1-2kz)+\frac{1}{2}k\tau x(x^2+y^2)+k\tau\left\{y\Phi(x,y)-\right.$$
$$\left.-(1-2\sigma)\left[\int^{y}\Phi(x,y)\,dy+h_2(x)\right]\right\};$$
$$w=\tau\Phi(x,y)(1-2kz)-k\tau z\left(x\frac{\partial\Phi}{\partial x}+y\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right).$$

Вычисляя напряжения, соответствующие этим перемещениям, и подсчитывая момент касательных напряжений X_z и Y_z относительно оси oz, можно показать, что момент этот не зависит от z, так что рассматриваемая нами деформация действительно может рассматриваться как кручение.

4. Полагая

$$f(\xi, \eta) = \xi^2 + \eta^2 - a^2,$$

мы получаем с точностью до k^2 известное (1) точное решение задачи о кручении конуса.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
25 V 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 С. П. Тимошенко, Курс теории упругости, ч. 1 (1914).