Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 4

МАТЕМАТИКА

Н. С. ПИСКУНОВ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 28 V 1938)

Существуют три типа линейных дифференциальных уравнений второго порядка с N переменными, которые до сих пор почти не изучены. Эти уравнения следующие:

1. Ненормальные гиперболические, если квадратичная форма после приведения имеет среди N квадратов n квадратов с отрицательными коэффициентами; $1 < n < N-1$.
2. Эллиптико-параболические, если квадратичная форма приводится к n_1 квадратам с положительными коэффициентами, причем $n_1+1 < N$.
3. Гиперболо-параболические, если квадратная форма приводится к n_2 квадратам, причем n_2' с положительными коэффициентами, n_2'' с отрицательными и $n_2 < N$.

Некоторые свойства уравнений ненормальных гиперболических изучены Asgeirsson'ом (1), а для уравнения гиперболо-параболического типа для трех переменных некоторые краевые задачи были рассмотрены автором (2). То, что эти уравнения мало изучены, объясняется тем, что неизвестно до сих пор ни одной физической задачи, решение которой сводилось бы к исследованию указанных уравнений. Этим также объясняется трудность задач, так как не имеется указаний со стороны физики, в каком направлении может итти исследование этих уравнений (какие задачи нужно и можно ставить для данных уравнений, область определения решений, свойства решений и т. д.).

Особое положение занимают уравнения эллиптико-параболического типа. Эти уравнения были получены при решении физических проблем. В своих работах «Zur Theorie der stetigen zufälligen Prozesse» (3) и «Zufällige Bewegungen» («Zur Theorie der Brownschen Bewegung») А. Н. Колмогоров показал, что функция распределения для величин рассматриваемого им процесса удовлетворяет уравнение эллиптико-параболического типа (уравнение параболического типа, вырожденное по нескольким переменным). К уравнению данного вида приводятся некоторые вопросы гидродинамики. Автором была рассмотрена задача: «Определение расхода потока химическим методом».

Частный случай рассматриваемой задачи для уравнения эллиптико-параболического типа был разобран автором ранее (4).

В данной работе рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u}{\partial y_i}+c\frac{\partial u}{\partial x}+bu+f; \quad \sum_{i=1}^{m} a_i^2 \geqslant \delta > 0, \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} a_i &= a_i(y_1 y_2, \ldots y_m, x), \\ c &= c(y_1 y_2, \ldots y_m, x), \\ b &= b(y_1 y_2, \ldots y_m, x), \\ f &= f(y_1 y_2, \ldots y_m, x). \end{aligned}$$

Основные свойства этих уравнений без труда переносятся на уравнения вида

$$\sum_{k,\, l=1}^{n} A_{kl}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}+\sum_{k=1}^{n} B_k \frac{\partial u}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u}{\partial y_i}+bu+f. \tag{1}$$

Пусть в пространстве $\{y_1 y_2, \ldots y_m, x\}$ имеется некоторая область V, ограниченная поверхностью s. Предположим для простоты рассуждения, что s гомеоморфна сфере. Пусть каждая прямая, параллельная оси ox, проведенная через внутреннюю точку V, пересекает s в двух точках. Рассмотрим далее множество точек пересечения семейства прямых, параллельных оси ox, проведенных через все внутренние точки V, с поверхностью s. Обозначим это множество через s_1''; s_1'' будет отличаться от s на множество точек, общих s и цилиндру, касающемуся V, с образующей, параллельной оси ox. Обозначим это множество через s'.

Рассмотрим семейство интегральных кривых системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_1}{a_1}=\frac{dy_2}{a_2}=\ldots=\frac{dy_m}{a_m}.$$

Эти линии будем называть линиями (β). Допустим, что множество s' разбивается некоторой $(m-1)$-мерной цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси ox, гомеоморфной $(m-1)$-мерному цилиндру, на две части s_1' и s_2' следующим образом:

Через s_1' линии (β) входят внутрь V, не касаясь s_1', а через s_2' не входят; направление входа будем определять как направления с направляющими косинусами

$$\frac{a_i}{+\sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2}}.$$

Будем рассматривать два случая:

I. Множество s_1' есть $(m-1)$-мерный континуум, не содержащий отрезков, параллельных оси ox.

II. Множество s_1' — цилиндрическая по x m-мерная поверхность. Будем предполагать, что s_1' и s_2' гомеоморфны шарам. Тогда задача ставится так.

При известных предположениях о гладкости a_i, b, c, f и s и взаимном расположении линий (β) и s доказать существование единственной функции u $(y_1, y_2, \ldots y_m, x)$, удовлетворяющей внутри области V уравнению (2) и принимающей на множествах s_1' и s_1'' заданные значения $(s_1'+s_1''=s_1)$.

Рассмотрим случай II.

Пусть в пространстве $m+1$ измерений $\{y_1 y_2 \ldots y_m, x\}$ имеется область V, ограниченная поверхностями

$$\Phi_1(y_1, y_2, \ldots y_m)=0, \tag{a}$$
$$\Phi_2(y_1, y_2, \ldots y_m)=0, \tag{b}$$
$$x=\varphi_1(y_1, y_2, \ldots y_m), \tag{c}$$
$$x=\varphi_2(y_1, y_2, \ldots y_m). \tag{d}$$

Допустим, что Φ_1, φ_1, φ_2 — непрерывные функции, допускающие непрерывные производные до 3-го порядка. Все эти поверхности проводятся так, чтобы выполнялось следующее:

1. Они ограничивают некоторый кусок пространства.
2. Линии (β) входят в область V через поверхность (a), не касаясь, и не входят через поверхность (b).
3. $\varphi_1(y_1, y_2, \ldots y_m)-\varphi_2(y_1, y_2, \ldots y_m)\geqslant\delta>0$ всюду в области, ограниченной поверхностями (a) и (b), но на самой поверхности (b) эта разность может обращаться в нуль.

Допустим, что коэффициенты a_i, b, c, f суть непрерывные функции, имеющие производные до 3-го порядка по своим аргументам. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если на поверхностях* (a), (d) и (c) *заданы функции* $f_1(y_1, y_2, \ldots y_m, x)$, $f_2(y_1, y_2, \ldots y_m, x)$, $f_3(y_1, y_2, \ldots y_m, x)$, *причем* f_1 — *непрерывная функция по* x *и имеет производные по другим аргументам до 3-го порядка,* f_2 и f_3 *имеют производные до 3-го порядка, то существует функция* $u(y_1, y_2, \ldots y_m, x)$, *удовлетворяющая уравнению* (2) *и совпадающая на поверхностях* (a), (d) и (c) *со значениями* f_1, f_2 и f_3. *Функция, удовлетворяющая указанным свойствам, единственна.*

Рассмотрим случай I.

Пусть множество s_1' есть $(m-1)$-мерный континуум без вертикальных кусков. Проекцию его на плоскость $x=0$ обозначим через L_1. После преобразования $\bar{x}=x-\varphi(y_1, \ldots y_m)$, где $x=\varphi(y_1, \ldots y_m)$ есть уравнение поверхности, в которой лежит кривая s_1', последняя расположится в плоскости $x=0$ и будет совпадать с L_1. После этого преобразования множество s_2' будет пересекаться с плоскостью $x=0$ по кривой L_2 (s_2' может быть и m-мерным множеством).

Преобразуем далее плоскость $x=0$ так, чтобы L_1 лежало в $(m-1)$-мерной плоскости $x=0$, $y_1=0$. Все эти преобразования не изменят формы уравнения (2). Область V и множества s_1'', $s_1's_2'$, определенные в начале параграфа, перейдут в некоторые другие, но свойства, которыми они определялись, остаются; поэтому мы не будем менять их названия за исключением L_1 отображения s_1'. Границу L_1, общую с L_2, обозначим через N.

Предположим, что в получившемся уравнении $a_1\geqslant\delta>0$ всюду в области V кроме как угодно малой окрестности множества N, где a_1 может обращаться в нуль, в то время как $a_i\neq 0$ $(i=2, \ldots m)$. На основании ранее сделанных предположений линии (β) будут входить внутрь области через L_1 и не будут входить через s_2'.

Тогда при некоторой гладкости s_1 имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если на* s_1 *задана трижды дифференцируемая по своим аргументам функция* $u(s)$, *то существует функция* $u(y_1, y_2, \ldots y_m, x)$, *удовлетворяющая уравнению* (2) *в области* V *и совпадающая с* $u(s)$ *на поверхности* s_1. *Функция, удовлетворяющая этим условиям, единственна.*

[2] Доклады Акад. Наук СССР, 1938, т. XX, № 4.

Рассмотрим снова область V, ограниченную поверхностями (a), (d), (c), (b). Пусть на поверхностях (a), (d), (c) заданы некоторые достаточно гладкие функции $U_0(y_2, \dots y_m, x)$, $f_1(y_1, y_2, \dots y_m)$, $f_2(y_1, \dots y_m)$. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема. *В области V существует единственная функция $U(y_1, y_2, \dots y_m, x)$, непрерывная вместе с первыми производными по y_i и второй по x, удовлетворяющая уравнению (2) и краевым условиям:*

$$U(0, y_2, \dots y_m, x) = U_0(y_2, \dots y_m, x); \quad \frac{\partial U}{\partial x}_{x=\varphi_1} = f_1(y_1, \dots y_m);$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}_{x=\varphi_2} = f_2(y_1, \dots y_m).$$

Случай бесконечной области.

Рассмотрим бесконечную область $0 \leqslant y_1 \leqslant Y$, $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$ и уравнение (2).

Пусть в этой области $a_1 \geqslant k > 0$, $|a_i| < \infty$ $(i = 2, \dots m)$. Тогда, не нарушая общности, можно предполагать, что $a_1 = 1$.

Теорема. *Пусть заданы функции $U_0(y_2, \dots y_m, x)$, $P_1(y_1, y_2, \dots y_m)$, $P_2(y_1, y_2, \dots y_m)$.*

Если в уравнении (2) a_i, b, f имеют производные до 2-го порядка по своим аргументам, P_1 и P_2 имеют производные до 3-го порядка, U_0 имеет производные до 2-го порядка по y_i и до 4-го по x, и если кроме того U_0 удовлетворяет соотношению $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$, то существует единственная функция $U(y_1, \dots y_m, x)$, удовлетворяющая уравнению (2) и условиям:

$$U(0, y_2, \dots y_m, x) = U_0(y_2, \dots y_m, x); \quad \lim_{x\to+\infty} U(y_1, \dots y_m, x) = P_1(y_1, \dots y_m);$$

$$\lim_{x\to-\infty} U(y_1, \dots y_m, x) = P_2(y_1, \dots y_m).$$

При этом предполагается

$$\lim_{x\to+\infty} U_0(y_2, \dots y_m, x) = P_1(0, y_2, \dots y_m); \quad \lim_{x\to\infty} U_0(y_2, \dots y_m, x) =$$

$$= P_2(0, y_2, \dots y_m); \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\partial^2 (U_0 - P)}{\partial y_i \partial y_j} = 0,$$

и свободный член после приведения функций P_1 и P_2 к нулю удовлетворяет условию $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f = 0$.

Показано, что при невыполнении последнего условия решение может и не существовать.

Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
1 VI 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Leifur Asgeirsson, Math. Ann., **113** (1936). [2] Пискунов, ДАН, XV, № 1 (1937) и Матем. сб. (1938). [3] А. Колмогоров, Math. Ann., **108**, 149. [4] Н. Пискунов, Матем. сб., **1 (43)**, 6, 931 (1936).