Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 4

МАТЕМАТИКА

Д. МИЛЬМАН

О НЕКОТОРЫХ ПРИЗНАКАХ РЕГУЛЯРНОСТИ ПРОСТРАНСТВ ТИПА (B)

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 31 V 1938)

I. В настоящей заметке мы будем придерживаться терминологии и обозначений, предложенных Банахом в его известной книге [1].

Кроме того, мы будем пользоваться еще такими определениями [2]:

Пространство E типа (B) называется **р е г у л я р н ы м**, если для каждого $x \in E$ существует $X \in \overline{\overline{E}}$ такой, что

$$f(x) = X(f) \text{ для всех } f \in \overline{E}.$$

Множество элементов $\mathfrak{M}$ называется трансфинитно-замкнутым, если для каждой трансфинитной ограниченной последовательности

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\eta, \ldots \quad (\eta < \vartheta)$$

существует по крайней мере один элемент x_0 (называемый трансфинитным пределом данной последовательности элементов) такой, что

$$\varliminf_{\eta<\vartheta} f(x_\eta) \leqslant f(x_0) \leqslant \varlimsup_{\eta<\vartheta} f(x_\eta) \text{ для всех } f \in \overline{E}.$$

А. И. Плеснеру принадлежит следующий критерий регулярности пространства [2].

A) Для того чтобы пространство * было регулярным, необходимо и достаточно, чтобы его единичная сфера $\|x\| \leqslant 1$ была трансфинитно-замкнута.

С другой стороны, как любезно сообщил мне Шмульян, имеет место следующее предложение:

B) Для того чтобы выпуклое, замкнутое множество K было трансфинитно-замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы для всякой трансфинитной последовательности вложенных друг в друга выпуклых, замкнутых и непустых множеств:

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \ldots \supseteq K_\eta \supseteq \ldots \quad (\eta < \vartheta),$$

существовал элемент x_0, принадлежащий всем K_η $(\eta < \vartheta)$.

---

* Здесь и в дальнейшем мы рассматриваем лишь пространства типа (B).

Укажем вкратце доказательство этого предложения: Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_\eta \ldots (\eta < \vartheta)$— трансфинитная ограниченная последовательность элементов и пусть K_η означает наименьшее выпуклое, замкнутое множество, содержащее $x_\eta, x_{\eta+1}, \ldots, x_\xi, \ldots (\xi < \vartheta)$. Нетрудно видеть, что

$$\underline{\lim}_{\eta<\vartheta} f(x_\eta) = \sup_{\eta<\vartheta} \inf_{x \in K_\eta} f(x); \quad \overline{\lim}_{\eta<\vartheta} f(x_\eta) = \inf_{\eta<\vartheta} \sup_{x \in K_\eta} f(x).$$

С другой стороны, произвольно взятый элемент x_0 принадлежит всем K_η тогда и только тогда, когда

$$\sup_{\eta<\vartheta} \inf_{x \in K_\eta} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \inf_{\eta<\vartheta} \sup_{x \in K_\eta} f(x) \text{ для всех } f \in \overline{E},$$

откуда и следует утверждение Шмульяна.

Напомним теперь, что Банах доказал:

C) Пространство E регулярно, если оно сепарабельно и его единичная сфера ($\|x\| \leqslant 1$) слабо-компактна [см. стр 189—190 в ([1])].

Гантмахер и Шмульян доказали теорему ([2]):

D) У всякого регулярного пространства единичная сфера слабо-компактна.

II. В связи с упомянутыми выше предложениями мы доказываем следующее:

Теорема 1. *Для того чтобы пространство было регулярным, необходимо и достаточно, чтобы его единичная сфера была слабо-компактной и чтобы каждая грань этой сферы была трансфинитно-замкнутой.*

В этой теореме под гранью сферы $\|x\| \leqslant R$ мы разумеем всякое выпуклое множество всех точек границы этой сферы, которые даются уравнениями:

$$f(x) = R, \ \|x\| = R, \text{ где } \|f\| = 1; \ f \in \overline{E}.$$

Доказательство. Необходимость условий теоремы непосредственно следует из предложений A) и D).

Для доказательства того, что выполнение этих условий влечет регулярность пространства, достаточно в силу предложений A) и B) показать, что в данном пространстве для каждой трансфинитной последовательности вложенных друг в друга выпуклых, замкнутых и непустых множеств существует элемент x_0, принадлежащий всем K_η.

Пусть a — произвольная точка, лежащая вне K_1. Опираясь на теорему Мазура о том, что всякое выпуклое, замкнутое множество слабо-замкнуто, нетрудно проверить, что расстояние от любой точки до выпуклого, замкнутого и слабо-компактного множества всегда достигается. Пусть x_η $(\eta < \vartheta)$ — точка, в которой достигается расстояние от a до K_η. Пусть $\|a - x_\eta\| = d_\eta$; $\sup_{\eta<\vartheta} d_\eta = d$. Очевидно, что $\eta_1 \leqslant \eta_2$ при $d_{\eta_1} \leqslant d_{\eta_2}$. Рассмотрим два случая:

1) $d_\eta < d$ для всех $\eta < \vartheta$.

Пусть $d_{\eta_1} < d_{\eta_2} < \ldots \to d$. Очевидно, что последовательность $\eta_1 < \eta_2 < \ldots$ определяет трансфинитный номер ϑ.

Пусть x_0 — слабая точка сгущения $\{x_{\eta_0}\}$; можно считать, что

$$x_{\eta_1} x_{\eta_2}, \ldots \to x_0.$$

По теореме Мазура $x_0 \in K_{\eta_p}$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$.

Пусть η — произвольный номер ($\eta < \vartheta$). Существует натуральное число N такое, что $\eta < \eta_N$; следовательно, $x_0 \in K_{\eta_N} \subseteq K_\eta$. Итак, элемент x_0 и есть искомый.

2) $d = d_0$ при некотором $\eta_0 < \vartheta$.

Очевидно, что в этом случае $d = d_\eta$ для $\eta_0 \leqslant \eta < \vartheta$. Пусть S — сфера радиуса d с центром a и

$$S \cdot K_\eta = S_\eta \qquad (\eta_0 \leqslant \eta < \vartheta).$$

Очевидно, что S_η есть часть некоторой грани S для $\eta_0 \leqslant \eta < \vartheta$. Следовательно, по условию теоремы S_{η_0} трансфинитно-замкнуто, но тогда согласно В) существует элемент x_0, принадлежащий всем S_η ($\eta_0 \leqslant \eta < \vartheta$), а, следовательно, всем $K_\eta (\eta < \vartheta)$, что и доказывает утверждение.

Следствие. *Если единичная сфера данного пространства слабо-компактна и все грани этой сферы сепарабельны, то пространство регулярно.*

Действительно, всякая трансфинитная последовательность вложенных друг в друга сепарабельных множеств содержит лишь счетное число различных множеств; отсюда в силу В) легко видеть, что всякое выпуклое, замкнутое, слабо-компактное и сепарабельное множество трансфинитно-замкнуто. Следовательно, при указанных условиях все грани единичной сферы трансфинитно-замкнуты.

Теорема 1 допускает следующее обобщение:

Теорема 1а. *Для того чтобы пространство было регулярным, необходимо и достаточно, чтобы его единичная сфера была слабо-компактной и чтобы на границе единичной сферы нашлась по крайней мере одна точка y_0, в некоторой окрестности которой каждая грань единичной сферы трансфинитно-замкнута; в частности, если в окрестности одной точки границы единичной сферы каждая грань сепарабельна, а единичная сфера слабо-компактна, то пространство регулярно.*

Ограничимся здесь указанием, что доказательство может быть проведено, как и в теореме 1, если некоторым специальным образом выбрать точку a, а именно:

Пусть T_0 сфера радиуса R охватывает K_1 и T_1 — концентричная с ней сфера радиуса $3R$. Тогда выберем на луче $y = -ty_0$, $t > 0$, точку $y_1 = -t_0 y_0$ так, чтобы граница сферы с центрам в y_1 радиуса $t_0 + 3R$ в окрестности точки $3R \cdot y_0$, охватывающей сферу T_1, содержала лишь трансфинитно-замкнутые грани. Легко видеть, что такой выбор всегда возможен.

III. Клерксон ([3]) установил понятие равномерной выпуклости пространства. Пространство называется равномерно-выпуклым, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из неравенства $\|x - y\| < \delta$; $\|y\| = \|x\| = R$, вытекает $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant (1 - \varepsilon) R$.

Мы будем называть единичную сферу равномерно-выпуклой в r-окрестности точки y_0, $\|y_0\| = R$, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из $\|x - y\| < \delta$; $\|x\| = \|y\| = R$; $\|x - y_0\| \leqslant r$; $\|y - y_0\| \leqslant r$ вытекает $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant (1 - \varepsilon) R$.

Мы докажем, пользуясь тем же методом доказательства, что и в теореме 1, следующее положение:

Теорема 2. *Равномерно-выпуклое пространство регулярно.*

Доказательство. Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_\eta, \ldots (\eta < \vartheta)$ — трансфинитная последовательность друг в друга вложенных, выпуклых, замкнутых и непустых множеств. Согласно сделанным ранее замечаниям теорема будет доказана, если мы покажем, что, какова бы ни была эта последовательность, всегда существует точка, принадлежащая всем K_η.

Нетрудно проверить, что в равномерно-выпуклом пространстве достигается расстояние от точки до выпуклого, замкнутого множества и притом только в одной точке.

Пусть a — произвольная точка вне K_1, пусть расстояние от a до K_η достигается в x_η. Пусть $\|a-x_\eta\|=d_\eta$, $(\eta<\vartheta)$; $\sup\limits_{\eta<\vartheta} d_\eta=d$. Возможны два случая:

1) $d_{\eta_0}=d$ для $\eta_0<\vartheta$; тогда в виду равномерной выпуклости единичной сферы элемент y_{η_0} есть искомый.

2) $d_\eta<d$ для всех $\eta<\vartheta$. Пусть $d_{\eta_1}<d_{\eta_2}<\ldots\to d$.

Последовательность $x_{\eta_1}, x_{\eta_2}, \ldots$ имеет сильный предел x_0. В самом деле, допустим противное, что

$$\|x_{m_p}-x_{n_p}\|\geqslant\delta>0, \text{ где } p=1,2,3,\ldots;\ \eta_{n_1}<\eta_{m_1}<\eta_{n_2}<\eta_{m_2}<\ldots$$

Так как $\lim\limits_{p\to\infty}\|x_{m_p}\|=\lim\limits_{p\to\infty}\|x_{n_p}\|=d$ и $\|x\|=1$ равномерно выпукло, то найдется такое $\varepsilon>0$, что $\left\|\frac{x_{\eta_{m_p}}+x_{\eta_{n_p}}}{2}\right\|\leqslant(1-\varepsilon)d$ при $p\geqslant N$.

Но $\frac{x_{\eta_{m_p}}+x_{\eta_{n_p}}}{2}\in K_{\eta_{n_p}}$, поэтому $d_{\eta_{n_p}}\leqslant\left\|\frac{x_{\eta_{m_p}}+x_{\eta_{n_p}}}{2}\right\|\leqslant(1-\varepsilon)d$, и мы пришли к противоречию. Итак, существует $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_{\eta_n}$. Так как последовательность $\eta_1, \eta_2, \ldots$ определяет ϑ, то мы заключаем, опираясь на вышеупомянутую теорему Мазура, что $x_0\in K_\eta$ для $\eta<\vartheta$. Этим теорема доказана.

Из доказанной теоремы между прочим вытекает, что результаты Клерксона ([3]) по построению интеграла в равномерно выпуклом пространстве являются частным следствием результатов И. М. Гельфанда, полученных им в его диссертации в 1935 г. ([4]).

Теорема 2 допускает следующее сообщение, доказательство которого проводится аналогично доказательству теоремы 1а.

Теорема 2а. *Если на границе единичной сферы пространства существует по крайней мере одна точка y_0, в некоторой окрестности $\|y-y_0\|\leqslant r$ которой единичная сфера равномерно выпукла, то пространство регулярно.*

Одесский государственный университет.

Поступило
3 VI 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa (1932). [2] В. Гантмахер и В. Шмульян, ДАН, XVII, № 3, 91—94 (1934). [3] Clarkson, Trans. of Amer. Math. Soc., 40, № 3. [4] И. Гельфанд, ДАН, XVII, № 5, 237—239 (1937).