Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 4

МАТЕМАТИКА

М. ЛАВРЕНТЬЕВ

ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ ПРИЗНАКЕ ГОМЕОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЛАСТЕЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 27 V 1938)

Пусть мы имеем:

$$u=u(x, y, z), \quad v=v(x, y, z), \quad w=w(x, y, z), \tag{1}$$

непрерывное отображение сферы S: $x^2+y^2+z^2<r^2$, $r\leqslant\infty$, на область D пространства (u, v, w). Будем предполагать, что функции u, v, w дифференцируемы в сфере S и что в той же сфере функциональный определитель

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}>0.$$

При этих условиях бесконечно малая сфера

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant\rho^2$$

при преобразовании (1) будет переходить в бесконечно малый эллипсоид, пусть a и c его большая и малая полуоси. Мы скажем, что отображение (1) квази-конформно в сфере S, если существует константа k, $k>1$, такая, что для каждой точки (x_0, y_0, z_0) сферы S будем иметь:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{a}{c}\leqslant k.$$

Для квази-конформных отображений можно установить ряд свойств, аналогичных соответствующим свойствам квази-конформных отображений плоских областей. Отметим два предложения, специфических для трехмерного случая.

Теорема 1. *Пусть отображение* (1) *дает квази-конформное отображение сферы* S, $r<\infty$, *на сферу* $\sum$: $u^2+v^2+w^2<r^2$ *или ее часть так, что каждая точка поверхности сферы* $\sum$ *является предельной для точек* (u, v, w), *соответствующих точкам* S. *При этих условиях соотношения* (1) *осуществляют гомеоморфное соответствие между замкнутыми сферами* S *и* $\sum$.

Теорема 2. *Пусть отображение* (1) *осуществляет квази-конформное отображение пространства* (x, y, z) *на пространство* (u, v, w) *или его часть. При этих условиях отображение* (1) *осуществляет гомеоморфное соответствие между пространствами* (x, y, z) *и* (u, v, w).

Последнюю теорему можно также формулировать следующим образом: если преобразование (1) осуществляет квази-конформное отображение всего пространства, то система (1) однозначно разрешима относительно x, y, z при любых значениях u, v, w.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
28 V 1938.