Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 4

МАТЕМАТИКА

М. ЛАВРЕНТЬЕВ

К ТЕОРИИ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 27 V 1938)

В двух заметках «К теории струй» (ДАН, XVIII, № 4—5, 1938) и предыдущей мной было отмечено несколько новых граничных свойств функций, осуществляющих конформное отображение данной области на полуплоскость, а также были отмечены некоторые приложения этих результатов к задаче обтекания со срывом струй дуг, расположенных в безграничной жидкости. В настоящей заметке я имею в виду указать ряд аналогичных результатов для случая функций, осуществляющих конформное отображение данной области на полосу, а также отметить некоторые гидродинамические приложения этих результатов.

1. Условимся в некоторых обозначениях. Пусть $D(\gamma)$ есть односвязная область, ограниченная кусочно-гладкими кривыми γ_1 и γ с общими концами в точках z_1 и z_2 *. Через $w=f(z,\gamma,\gamma_1)$ мы будем обозначать функцию, реализующую конформное отображение области $D(\gamma)$ на полосу $-1<v<0$, плоскости $w=u+iv$, при условиях $f(z_1,\gamma,\gamma_1)=-\infty$, $f(z_2,\gamma,\gamma_1)=+\infty$. Через $V(s)$ мы будем обозначать $|f'(z,\gamma,\gamma_1)|$ в точках γ, рассматриваемую как функция длины дуги s линии γ. В дальнейшем будем предполагать γ и γ_1 такими, чтобы $V(s)$ существовала и была отлична от нуля как на γ, так и на γ_1.

В основе метода доказательств приводимых ниже предложений лежит следующая лемма.

Лемма. *Пусть нам даны две области $D(\gamma)$ и $D(\bar\gamma)$, ограниченные соответственно кривыми γ_1, γ и γ_1, $\bar\gamma$. Пусть $D(\bar\gamma)$ содержит $D(\gamma)$, а линии γ и $\bar\gamma$ (кроме точек z_1, z_2) имеют общую точку z_0. При этих условиях имеем:*

$$|f'(z_0,\bar\gamma,\gamma_1)|\geqslant|f'(z_0,\gamma,\gamma_1)|,$$

кроме того в каждой точке z дуги γ_1:

$$|f'(z,\bar\gamma,\gamma_1)|\leqslant|f'(z,\gamma,\gamma_1)|,$$

знаки равенств достигаются только при совпадении γ и $\bar\gamma$.

Приведем теперь два результата, касающиеся поведения $V(s)$.

Теорема 1. *Пусть γ_1 есть ось x или ее отрезок, а γ — кусочно-гладкая кривая, расположенная в верхней полуплоскости, имеющая*

* Точки z_1 и z_2 могут совпадать с точкой ∞.

с осью x общими лишь свои концы z_1, z_2, $z_1 < z_2$, и такая, что 1) *некоторая точка s_0 делит кривую γ на две части, расположенные целиком по разные стороны от касательной T, проведенной к γ через точку s_0,* 2) *в окрестности точки s_0 кривая γ обладает кривизной, удовлетворяющей условию Hölder'а. При этих условиях, если при движении по T из точки s_0 в сторону возрастания s мы придем в область $D(\gamma)$ [в область, дополнительную к $D(\gamma)$] или будем все время оставаться на γ при $y > 0$, то*

$$V'(s_0) \geqslant 0 \qquad (V'(s_0) \leqslant 0), \tag{1}$$

причем знаки равенств достигаются только тогда, когда γ есть прямая, параллельная оси x.

Если в условиях неравенства (1) дополнительно допустить, что угол α, образованный положительным направлением T * с положительным направлением оси x, заключен между 0 и $-\pi$, то будем соответственно иметь:

$$V'(s_0) \geqslant \frac{\sin^2\alpha}{|\alpha|}\frac{1}{y_0^2} \qquad \left(V'(s_0) \leqslant -\frac{\sin^2\alpha}{|\alpha|}\frac{1}{y_0^2}\right),$$

где y_0 есть ордината точки s_0.

Теорема 2. *Пусть при прежних обозначениях в окрестности точки s_0 дуга γ обладает дважды дифференцируемой кривизной, а γ_1 есть произвольная дуга Жордана. Если круг кривизны γ для точки s_0 принадлежит $D(\gamma)$* [расположен вне $D(\gamma)$], *то*

$$\frac{d^2 \lg V(s_0)}{ds_0^2} > \frac{1}{4r^2} - \frac{d\,V(s_0)}{ds_0} \qquad \left(\frac{d^2 \lg V(s_0)}{ds_0^2} < -\frac{C(k)}{r^2} - \frac{d\,V(s_0)}{ds_0}\right),$$

*где r есть радиус кривизны γ в точке s_0, а $C(k)$ есть положительная константа, зависящая только от степени достижимости k точки s_0***.

2. Из приведенных выше результатов можно получить, применяя прямые методы вариационного исчисления, различные теоремы существования и качественные результаты в общей теории струй. Приведем одну теорему существования решения задачи на обтекание дуги со срывом струй, дуги, расположенной между двумя криволинейными стенками.

Теорема 3. *Пусть γ_1 есть кривая, расположенная в нижней полуплоскости и определяемая однозначной функцией x: $y = F_1(x)$, $|x| < \infty$. Пусть кроме того дана дуга Γ_1: $y = \varphi(x)$, где φ определена, однозначна и дважды дифференцируема на отрезке $(0, x_1)$, причем $\varphi(0) = 0$, $F_1(x) < \varphi(x) \leqslant 0$. При этих условиях существует единственная кривая Γ_2: $y = \psi(x)$, $\psi(x_1) = \varphi(x_1)$, $\psi(x) \leqslant 0$, определенная при $x \geqslant x_1$ и такая, что в каждой точке этой кривой при $\psi(x) < 0$ будем иметь*

$$V(s) = |f'(z, \gamma, \gamma_1)| = c = \text{const},$$

где γ есть кривая, составленная из отрицательной части оси x, дуги Γ_1 и кривой Γ_2.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
28 V 1938.

* Положительное направление на T мы считаем таким, чтобы оно совпадало в точке s_0 с направлением возрастания s.

** Определение степени достижимости дано в нашей предыдущей заметке.