Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XX, № 4

МАТЕМАТИКА

М. ЛАВРЕНТЬЕВ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 27 V 1938)

В настоящей заметке я имею в виду дать ряд дополнений к результатам, отмеченным мной в заметке «К теории струй» (ДАН, XVIII, № 4—5, 1938).

1. Пусть γ — простая кусочно-гладкая замкнутая кривая Жордана замкнутой плоскости комплексного переменного z (сферы Римана), проходящая через точку $z=\infty$. Будем обозначать через $D(\gamma)$ одну из областей, ограниченных γ, а через $w=f(z,\gamma)$, $f(\infty,\gamma)=\infty$ — функцию, реализующую конформное отображение области $D(\gamma)$ на нижнюю полуплоскость $v<0$, плоскости $w=u+iv$. Кроме того, будем обозначать через $V(s)$ значения $|f'(z,\gamma)|$ в точках γ, рассматриваемые как функция дуги s кривой γ, причем направление возрастания s выберем так, чтобы ему соответствовало возрастание u.

Теорема 1. *Пусть касательная T к γ, проведенная через ее точку s_0, разбивает γ на две части, расположенные по разные стороны от T, и пусть в окрестности точки s_0 линия γ обладает кривизной, удовлетворяющей условию* Hölder'a. *При этих условиях имеем или*

$$V'(s_0)>0$$

или

$$V'(s_0)<0,$$

в зависимости от того, будет ли луч касательной T, выходящий из s_0 в сторону возрастания s, расположен в области $D(\gamma)$ или вне ее.

2. Сохраняя обозначения, принятые в 1, введем одно геометрическое понятие. Допустим, что кривая γ в точке t_0 обладает кругом кривизны K радиуса r, центр K расположен вне $D(\gamma)$. Установим на γ положительное направление так, чтобы оно в точке t_0 совпадало с направлением движения по окружности круга K против часовой стрелки. Обозначим через z_0 центр круга K и положим $\arg(t_0-z_0)=\alpha_0$, $0\leqslant\alpha_0<2\pi$. Обозначим, кроме того, через $\alpha(t)$ непрерывную функцию точки t кривой γ, совпадающую (с точностью до чисел кратных 2π) с аргументом $(t-z_0)$ и равную α_0 в точке t_0. Рассмотрим множество $E^+(E^-)$ точек t кривой γ таких, что 1) направление движения от t_0 к t совпадает с положительным (отрицательным) направлением на γ, 2) для каждой точки t нашего множества функция $\alpha(t)$ меньше (больше) α_0. Через $m^+(m^-)$ мы обозначим нижнюю границу значений $|t-z_0|-r$

на множестве $E^+(E^-)$. Пусть, кроме того, m^0 есть нижняя граница радиусов кругов, содержащихся в $D(\gamma)$ и касающихся γ в точке t_0. Число k, равное наименьшему из трех чисел $\frac{m^+}{2r}$, $\frac{m^-}{2r}$, $\frac{m^0}{r}$, мы будем называть степенью достижимости точки t_0. Из определения степени достижимости непосредственно следует, что если круг K расположен вне области $D(\gamma)$, то степень достижимости есть положительное число. Если кривая γ такова, что всякая параллель некоторому фиксированному направлению пересекает γ не более, чем в одной точке, то степень достижимости совпадает с $\frac{m_0}{r}$.

Теорема 2. *Пусть γ есть простая замкнутая кривая, пусть в окрестности некоторой ее точки s_0 кривизна непрерывна вместе с ее двумя первыми производными. При этих условиях, если круг кривизны для точки s_0 расположен внутри $D(\gamma)$, то*

$$\frac{d^2 \lg V(s_0)}{ds^2} > \frac{1}{4r^2}, \tag{1}$$

если тот же круг расположен вне $D(\gamma)$, то

$$\frac{d^2 \lg V(s_0)}{ds^2} < -\frac{C(k)}{r^2}, \tag{2}$$

*где r — радиус кривизны γ в точке s_0, а $C(k)$ есть положительная константа, зависящая только от степени достижимости k точки s_0**.

3. Приведенные свойства однолистных функций могут быть использованы в теории струй как в направлении теорем существования и единственности решения **, так и в направлении качественного исследования решений. Приведем в дополнение к предыдущей заметке несколько результатов качественного характера. Пусть γ есть дуга, обладающая ограниченной кривизной, симметричная относительно оси x и такая, что каждая параллель оси y пересекает γ не более, чем в двух точках. Рассмотрим симметричное обтекание γ со срывом струй в ее концах, причем из двух противоположно направленных течений выберем то, при котором свободные струи $y = \pm y(x, \gamma)$, $y(x, \gamma) \geqslant 0$ определяются однозначной функцией x. При этих условиях имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $y = \pm y(x, \gamma)$ и $y = \pm y(x, \bar{\gamma})$ суть свободные струи потока, обтекающие соответственно дуги γ и $\bar{\gamma}$, имеющие общие концы. Если при одинаковых абсциссах модули ординат точек $\bar{\gamma}$ не больше модулей ординат точек γ, то*

$$y(x, \bar{\gamma}) \geqslant y(x, \gamma),$$

причем знак равенства достигается только при совпадении γ и $\bar{\gamma}$.

Опираясь на эту теорему, а также на лемму предыдущей заметки, весьма просто получить качественную картину возможных обтеканий со срывом струй выпуклых тел.

---

* В цитированной выше нашей заметке (при ряде дополнительных ограничений на γ) вместо неравенства (1) и (2) были ошибочно написаны соответственно следующие неравенства $V''(s_0) > 0$ и $V''(s_0) < 0$: первое из этих неравенств есть следствие неравенства (1), а второе, как легко показать на примере, в общем случае неверно.

** См. нашу предыдущую заметку.

Пусть T есть выпуклое тело, симметричное относительно оси x и ограниченное гладкой линией Γ. Обозначая через x_0 и x_1, $x_0 < x_1$, абсциссы точек пересечения Γ с осью x, обозначим через γ_t часть Γ, принадлежащую полосе $x_0 \leqslant x \leqslant t$, а через Γ_t часть Γ, дополнительную к γ_t. Будем рассматривать поток со скоростью, в бесконечности направленной по оси x, симметрично обтекающий γ_t со срывом струй в ее концах. Для того чтобы было возможно обтекание T со срывом струй в точках с абсциссой t, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы струи $y = \pm y(x, \gamma_t) \equiv \pm y(x, t)$ были расположены вне T.

Теорема 4. *Существуют два числа t_1 и t_2, $x_0 < t_1 < t_2 < x_1$, из которых первое меньше абсциссы точек Γ с экстремальными ординатами, такие, что при $x_0 < t < t_1$ струи $y = \pm y(x, t)$ пересекают T, при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ струи $y = \pm y(x, t)$ не пересекают T и имеют бесконечные ветки и при $t_2 < t < x_1$ струи $y = \pm y(x, t)$ не пересекают T, причем при $x \geqslant x(t) > x_1$ имеем $y(x, t) \equiv 0$ — струи соединяются за телом на конечном расстоянии от него.*

При тех же обозначениях, если считать скорость в бесконечности и плотность жидкости фиксированными, то среди всех возможных обтеканий тела T обтекание, соответствующее наиболее раннему отрыву струй (в точках с абсциссой t_1), дает наибольшее значение для равнодействующей сил давления жидкости на тело. Это наибольшее значение равнодействующей сил давления назовем лобовым сопротивлением тела T.

Рассмотрим прямоугольник $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$. Возьмем на левой стороне этого прямоугольника отрезок d, симметричный относительно оси x, и решим для этого отрезка задачу на обтекание d со срывом струй (случай Кирхгофа). Размер d определим так, чтобы соответствующие свободные струи прошли через точки (a, b) и $(a, -b)$. Обозначим через $T(a, b)$ тело, ограниченное отрезком d, свободными струями и правой стороной нашего прямоугольника.

Теорема 5. *Среди всех выпуклых тел, вписанных в данный прямоугольник $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, тело $T(a, b)$ обладает наименьшим лобовым сопротивлением.*

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
28 V 1938.