Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 9

ГЕОФИЗИКА

Н. МИГАЛЬ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАЗНОСТЕЙ ЭКВАТОРИАЛЬНЫХ И МЕРИДИАННЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ЗЕМЛИ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 7 IV 1938)

Положим в формуле Грина (G. Green):

$$\int_S \left(v\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial v}{\partial n}\right) ds = \int_T (v\Delta V - V\Delta v)\, d\tau, \quad V = W, \quad v = \rho^2 F(\theta, \lambda),$$

где W — потенциал силы тяжести Земли, s — поверхность геоида, v — некоторая гармоническая функция внутри объема T геоида, ρ — радиус-вектор, $F(\theta, \lambda)$ — функция от полярных координат θ, λ; ds — элемент поверхности, $d\tau$ — элемент объема. Получим:

$$4\pi f \int_M v\,dm = \int_S vg\,ds + 2\omega^2 \int_T v\,d\tau, \tag{1}$$

где $\frac{\partial W}{\partial n} = g$ — ускорение силы тяжести на поверхности геоида, ω — угловая скорость вращения Земли, f — постоянная притяжения, M — масса, заключенная внутри геоида, dm — элемент массы.

Формула (1) хорошо известна, и мы ее приводим для полноты вывода.

Выразим ds через элемент поверхности $d\sigma$ уровенного эллипсоида $\sum$, удовлетворяющего всем требованиям теории Стокса (G. G. Stokes). Мы имеем:

$$ds = \frac{(\rho + N)^2}{\rho^2} d\sigma = \left(1 + 2\frac{N}{\rho} + \frac{N^2}{\rho^2}\right) d\sigma,$$

пренебрегая при этом отклонением отвеса. Здесь N — расстояние от геоида до уровенного эллипсоида, ρ — радиус-вектор эллипсоида. Стало быть:

$$4\pi f \int_M v\,dm = \int_\Sigma [vg]_s \left(1 + 2\frac{N}{\rho} + \frac{N^2}{\rho^2}\right) d\sigma + 2\omega^2 \int_T v\,d\tau.$$

Написав аналогичную формулу для уровенного эллипсоида и взяв их разность, получим:

$$\Delta J = \int\limits_{\Sigma} \left\{ [vg]_s - [v\gamma]_{\Sigma} \right\} d\sigma + 2 \int\limits_{\Sigma} [vg]_s \frac{N}{\rho} d\sigma + \int\limits_{\Sigma} [vg]_s \frac{N^2}{\rho^2} d\sigma + 2\omega^2 \int\limits_{\Sigma} v_{\Sigma} N d\sigma, \quad (2)$$

причем разность

$$\int\limits_{T} v d\tau - \int\limits_{T'} v d\tau'$$

(T' — объем, занимаемый уровенным эллипсоидом) заменена через

$$\int\limits_{\Sigma} v_{\Sigma} N d\sigma,$$

γ обозначает ускорение силы тяжести на поверхности уровенного эллипсоида, M' — масса его,

$$\Delta J = 4\pi f \left\{ \int\limits_{M} v dm - \int\limits_{M'} v dm' \right\}.$$

Положив в формуле (2) $v_s = v_{\Sigma} + \delta v$, получим:

$$\Delta J = \int\limits_{\Sigma} (g - \gamma) v_{\Sigma} d\sigma + \int\limits_{\Sigma} \delta v g d\sigma + 2 \int\limits_{\Sigma} v_{\Sigma} g \frac{N}{\rho} d\sigma + 2 \int\limits_{\Sigma} \delta v g \frac{N}{\rho} d\sigma +$$
$$+ \int\limits_{\Sigma} v_{\Sigma} g \frac{N^2}{\rho^2} d\sigma + \int\limits_{\Sigma} \delta v g \frac{N^2}{\rho^2} d\sigma + 2\omega^2 \int\limits_{\Sigma} v_{\Sigma} N d\sigma.$$

Так как

$$v = \rho^2 F(\theta, \lambda); \ \delta v = [(\rho + N)^2 - \rho^2] F(\theta, \lambda) = 2N\rho F(\theta, \lambda) + N^2 F(\theta, \lambda),$$

то

$$\Delta J = \int\limits_{\Sigma} (g - \gamma) \rho^2 F(\theta, \lambda) d\sigma + 4 \int\limits_{\Sigma} N\rho g F(\theta, \lambda) d\sigma + 6 \int\limits_{\Sigma} N^2 g F(\theta, \lambda) d\sigma +$$
$$+ 3 \int\limits_{\Sigma} g \frac{N^3}{\rho} F(\theta, \lambda) d\sigma + \int\limits_{\Sigma} g \frac{N^4}{\rho^2} F(\theta, \lambda) d\sigma + 2\omega^2 \int\limits_{\Sigma} \rho^2 N F(\theta, \lambda) d\sigma.$$

Третий, четвертый и пятый интегралы по сравнению с вторым суть малые величины порядка $\frac{N}{\rho}$ и выше; пренебрегая ими, получим:

$$\Delta J = \int\limits_{\Sigma} (g - \gamma) \rho^2 F(\theta, \lambda) d\sigma + 4 \int\limits_{\Sigma} N\rho g F(\theta, \lambda) d\sigma + 2\omega^2 \int\limits_{\Sigma} \rho^2 N F(\theta, \lambda) d\sigma. \quad (3)$$

Эта формула является основной для дальнейших выкладок.

Введем для моментов инерции геоида (под моментами инерции геоида относительно оси, плоскости или точки мы понимаем момент инерции от масс, находящихся внутри геоида) следующие обозначения:

$$A = \int\limits_{M} (y^2 + z^2) dm, \quad B = \int\limits_{M} (z^2 + x^2) dm, \quad C = \int\limits_{M} (x^2 + y^2) dm.$$

Соответствующие моменты инерции уровенного эллипсоида обозначим через A', B' и C', причем $A' = B'$.

Нетрудно видеть, что

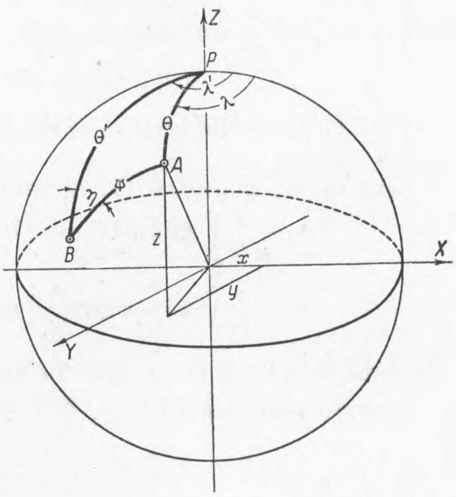
$$B - A = \frac{\Delta J_1}{4\pi f}, \quad A - C = A' - C' + \frac{\Delta J_2}{4\pi f}, \quad (3')$$

ибо гармонические функции x^2-y^2, z^2-x^2 приводятся к виду $\rho^2F(\theta,\lambda)$. Здесь ΔJ_1 и ΔJ_2 — соответствующие значения ΔJ. Что касается разности $A'-C'$, то она легко находится по заданным размерам уровенного эллипсоида и заданому значению ускорения силы тяжести на экваторе.

Используем теперь формулу (3) для получения ΔJ_1 и ΔJ_2.

Так как $x^2-y^2=\rho^2\sin^2\theta\cos 2\lambda$, то $F(\theta,\lambda)=\sin^2\theta\cos 2\lambda$ (см. фигуру).

Здесь
$$\rho=\frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\sin^2\theta}}, \text{ откуда}$$
$$\rho=a\sqrt{1-e^2}\left(1+\frac{1}{2}e^2\sin^2\theta+\frac{3}{8}e^4\sin^4\theta+\ldots\right),$$
$$\rho^2=a^2(1-e^2)(1+e^2\sin^2\theta+e^4\sin^4\theta+\ldots),$$
где e — эксцентриситет эллипсоида, a — большая полуось его.



Подставим все это в формулу (3) и примем во внимание $g=g_э(1+\beta\cos^2\theta)$, где $g_э$ — ускорение силы тяжести на экваторе, $\beta=\frac{5}{2}q-\alpha$, $q=\frac{\omega^2 a}{g_э}$, α — сжатие эллипсоида.

Получим:
$$\Delta J_1=(1-e^2)a^2\int_\Sigma(g-\gamma)H(\theta,\lambda)\,d\sigma+\left[4g_э a\left(1-\frac{1}{2}e^2+\beta\right)+2\omega^2a^2\right]\times$$
$$\times\int_\Sigma N\sin^2\theta\cos 2\lambda\,d\sigma+4g_э a\times\left(\frac{1}{2}e^2-\beta\right)\int_\Sigma N\sin^4\theta\cos 2\lambda\,d\sigma, \quad (4)$$
где $H(\theta,\lambda)=(1+e^2\sin^2\theta)\sin^2\theta\cos 2\lambda$, пренебрегая при этом величинами порядка e^4, $e^2\beta$.

Преобразуем теперь два последних интеграла, входящие в формулу (4). Для этого примем во внимание формулу Стокса [1]:
$$N=\frac{a}{4\pi g_0}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\Delta g S(\psi)\sin\psi\,d\psi\,d\eta,$$
где
$$S(\psi)=\frac{1}{\sin\frac{\psi}{2}}-6\sin\frac{\psi}{2}+1-5\cos\psi-3\cos\psi\ln\left(\sin\frac{\psi}{2}+\sin^2\frac{\psi}{2}\right).$$

Мы имеем:
$$\left.\begin{aligned}
J_1&=\int_\Sigma N\sin^2\theta\cos 2\lambda\,d\sigma=\\
&=\frac{a}{4\pi g_0}\int_\Sigma\Delta g(\theta',\lambda')\left\{\int_0^\pi\int_0^{2\pi}S(\psi)\sin\psi\sin^2\theta\cos 2\lambda\,d\psi\,d\eta\right\}d\sigma,\\
J_2&=\int_\Sigma N\sin^4\theta\cos 2\lambda\,d\sigma=\\
&=\frac{a}{4\pi g_0}\int_\Sigma\Delta g(\theta',\lambda')\left\{\int_0^\pi\int_0^{2\pi}S(\psi)\sin\psi\sin^4\theta\cos 2\lambda\,d\psi\,d\eta\right\}d\sigma.
\end{aligned}\right\}\quad (5)$$

Далее, из сферического треугольника ABP (см. фигуру), имеем:

$$\sin\theta' \operatorname{ctg}\psi = \sin\eta \operatorname{ctg}(\lambda' - \lambda) + \cos\theta' \cos\eta,$$

откуда

$$\cos 2\lambda = \frac{\cos^2\theta' \cos^2\eta + \sin^2\theta' \operatorname{ctg}^2\psi - \sin 2\theta' \cos\eta \operatorname{ctg}\psi - \sin^2\eta}{\cos^2\theta' \cos^2\eta + \sin^2\theta' \operatorname{ctg}^2\psi - \sin 2\theta' \cos\eta \operatorname{ctg}\psi + \sin^2\eta} \cdot \cos 2\lambda' +$$

$$+ 2\,\frac{\sin\theta' \sin\eta \operatorname{ctg}\psi - \cos\theta' \cos\eta \sin\eta}{\cos^2\theta' \cos^2\eta + \sin^2\theta' \operatorname{ctg}^2\psi - \sin 2\theta' \cos\eta \operatorname{ctg}\psi + \sin^2\eta} \cdot \sin 2\lambda'.$$

Кроме того $\cos\theta = \cos\theta' \cos\psi + \sin\theta' \sin\psi \cos\eta$.

С помощью этих формул произведения $\sin^2\theta \cos 2\lambda$ и $\sin^4\theta \cos 2\lambda$ могут быть представлены как функции от λ', θ', ψ, η.

Заменив таким образом θ и λ через θ', λ', ψ, η и произведя интегрирование, получим:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} S(\psi) \sin\psi \sin^2\theta \cos 2\lambda \, d\psi \, d\eta = 4\pi \sin^2\theta' \cos 2\lambda',$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} S(\psi) \sin\psi \sin^4\theta \cos 2\lambda \, d\psi \, d\eta = \pi \cos 2\lambda' \left(\frac{16}{7} \sin^2\theta' + \frac{4}{3} \sin^4\theta'\right).$$

Стало быть, формулы (5) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \frac{a}{g_0} \int_{\Sigma} \Delta g \sin^2\theta' \cos 2\lambda' d\sigma, \\ J_2 &= \frac{a}{g_0} \int_{\Sigma} \Delta g \cos 2\lambda' \left(\frac{4}{7} \sin^2\theta' + \frac{1}{3} \sin^4\theta'\right) d\sigma, \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

Подставив (5′) в (4) и приняв во внимание, что с точностью до величин первого порядка $e^2 = 2\alpha$, $\frac{g_э}{g_0} = 1 - \frac{5}{4} q + \frac{\alpha}{2}$, окончательно получим:

$$\Delta J_1 = a^2 \int_{\Sigma} (g - \gamma) F(\theta, \lambda) \, d\sigma + 4a^2 \left(1 + \frac{9}{28} q - \frac{5}{14} \alpha\right) \int_{\Sigma} \Delta g \sin^2\theta \cos 2\lambda \, d\sigma +$$

$$+ 4a^2 \left(\frac{2}{3} \alpha - \frac{5}{6} q\right) \int_{\Sigma} \Delta g \sin^4\theta \cos 2\lambda \, d\sigma, \tag{6}$$

где $F(\theta, \lambda) = (1 - 2\alpha \cos^2\theta) \sin^2\theta \cos 2\lambda$, $g - \gamma$ — аномалия Прея-Пуанкаре, Δg — аномалия Фая.

Совершенно таким же методом получим формулу, определяющую ΔJ_2. Мы ее выпишем без вывода:

$$\Delta J_2 = a^2 \int_{\Sigma} (g - \gamma) Q(\theta, \lambda) \, d\sigma + 4a^2 \left(2\alpha - \frac{5}{2} q\right) \int_{\Sigma} \Delta g H(\theta, \lambda) \, d\sigma +$$

$$+ 4a^2 \left(1 + \frac{3}{4} q - \frac{\alpha}{2}\right) \int_{\Sigma} \Delta g L(\theta, \lambda) \, d\sigma, \tag{7}$$

где $Q(\theta, \lambda) = 1 - 2\alpha + (4\alpha - 1) \sin^2\theta - 2\alpha \sin^4\theta + (2\alpha \cos^2\theta - 1) \sin^2\theta \cos^2\lambda$,

$$H(\theta, \lambda) = \frac{38}{105} - \frac{1}{7} \sin^2\theta - \frac{1}{2} \sin^4\theta - \left(\frac{2}{7} \sin^2\theta + \frac{1}{6} \sin^4\theta\right) \cos 2\lambda,$$

$$L(\theta, \lambda) = 1 - \frac{3}{2} \sin^2\theta - \frac{1}{2} \sin^2\theta \cos 2\lambda.$$

Для нахождения разностей моментов инерции Земли необходимо учесть еще действие материковых масс.

Полтавская гравиметрическая обсерватория
Академии наук УССР.

Поступило
20 IV 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. G. Stokes, On the Variation of Gravity at the Surface ot the Earth.