Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 9

ФИЗИКА

Д. ИВАНЕНКО и А. СОКОЛОВ

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ ОБ УРАВНЕНИЯХ ТЕОРИИ ЛИВНЕЙ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 10 IV 1938)

Основные уравнения мультипликативной теории ливней столь сложны, что до сих пор оказалось возможным дать для них только приближенную трактовку. Баба и Гейтлер ограничиваются численным решением, Карлсон и Оппенгеймер вводят вспомогательное уравнение вместо первоначального. Поэтому нам казалось желательным найти простое замкнутое решение, не вводя новых добавочных предположений.

В качестве диференциальных эффективных сечений для образования пары фотоном и для излучения фотона заряженной частицей выберем следующие выражения, имеющие место при больших энергиях:

$$\sigma_p = \frac{2K}{3\varepsilon}, \quad \sigma_r = \frac{K}{\varepsilon}, \tag{1}$$

где

$$K = \frac{4NZ^2}{137}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \lg 183 \cdot Z^{-\frac{1}{3}} \text{ см}^{-1}$$

и ε — энергия фотона.

Тогда для изменения числа заряженных частиц $P(E, t)dE$ и фотонов $\Gamma(E, t)dE$ как функции энергии E и глубины $x = \frac{t}{K}$ см имеем основные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP(E, t)}{dt} &= \frac{4}{3}\int_E^\infty d\varepsilon \frac{\Gamma(\varepsilon, t)}{\varepsilon} + \int_E^\infty d\varepsilon \frac{P(\varepsilon, t)}{\varepsilon - E} - P(E, t)\int_0^E \frac{d\varepsilon}{E-\varepsilon}, \\ \frac{d\Gamma(E, t)}{dt} &= \frac{1}{E}\int_E^\infty d\varepsilon\, P(\varepsilon, t) - \frac{2}{3}\Gamma(E, t). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Применим теперь преобразования Лапласа-Меллина:

$$f(E) = \frac{1}{2\pi i E}\int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} dsE^{-s} f(s), \quad f(s) = \int_0^\infty dEE^s f(E), \tag{3}$$

и сведем (2) к системе дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dP(s,t)}{dt} &= -[\psi(s+1)+\gamma]\,P(s,t)+\frac{4}{3(s+1)}\Gamma(s,t),\\ \frac{d\Gamma(s,t)}{dt} &= \frac{1}{s}P(s,t)-\frac{2}{3}\Gamma(s,t).\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

(Значения для ψ и γ см. в теории Γ-функций.)

Беря за начальное условие например одну заряженную частицу энергии E_0 и отбрасывая в (4) второе решение, исчезающее для больших t, мы получим, вычисляя интеграл при помощи метода седловидной точки, искомую замкнутую формулу для числа заряженных частиц:

$$P(E,t)=\frac{\exp[\chi(s_0)\,t]}{E\sqrt{2\pi t\chi''(s_0)}}\left[1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right],$$

где

$$\left.\begin{aligned}\chi(s) &= \frac{s}{t}\lg\frac{E_0}{E}-\frac{\psi(s+1)+\gamma+\frac{2}{3}}{2}+\\ &+\left[\left(\frac{\psi(s+1)+\gamma-\frac{2}{3}}{2}\right)^2+\frac{4}{3s(s+1)}\right]^{\frac{1}{2}}+\\ &+\frac{1}{t}\lg\left(\frac{1}{2}-\frac{\psi(s+1)+\gamma-\frac{2}{3}}{4\left[\left(\frac{\psi(s+1)+\gamma-\frac{2}{3}}{2}\right)^2+\frac{4}{3s(s+1)}\right]^{\frac{1}{2}}}\right),\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

и

$$\chi'(s_0)=0.$$

Число фотонов дается аналогичным выражением. Интересно отметить, что условия применимости метода седловидной точки соответствуют физическим ограничениям всей проблемы (большие t, высокие энергии, пренебрежение ионизацией).

Наши решения точно совпадают с результатами Карлсона-Оппенгеймера для $y \gg t$, давая оправдание для ряда неясных пренебрежений, сделанных ими в этом случае. При другом крайнем значении $y \ll t$ мы получаем несколько более общее выражение. Выбор более сложных эффективных сечений дает весьма близкий результат.

Сибирский физико-технический институт.
Томск.

Поступило
7 IV 1938.