Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 8

ГИДРОДИНАМИКА

Н. Е. КОЧИН

О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ С ДНОМ, ИМЕЮЩИМ УСТУП

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 16 IV 1938)

Рассмотрим плоскую задачу о безвихревом движении тяжелой несжимаемой однородной жидкости в канале, дно которого $ABCD$ имеет уступ BC высоты 2ε. Направляя ось Ox горизонтально, ось Oy вертикально вверх, будем иметь на горизонтальном участке дна AB, простирающемся в бесконечность в направлении отрицательной оси Ox, равенство $y=+\varepsilon$; на вертикальном участке дна BC будем иметь равенство $x=0$, наконец на горизонтальном участке дна CD, простирающемся в бесконечность в направлении положительной оси Ox, будем иметь $y=-\varepsilon$. Свободную поверхность жидкости обозначим через EF. Пусть жидкость движется в направлении положительной оси Ox, причем заданы величина скорости c и глубина $h-\varepsilon$ невозмущенной жидкости при $x=-\infty$. Наличие уступа у дна вызовет возмущение движения жидкости. Определим это возмущение и вид свободной поверхности жидкости, пренебрегая квадратом величины $\frac{\varepsilon}{h}$, предполагаемой малой.

В плоскости комплексного потенциала $w=\varphi+i\psi$ области течения соответствует полоса $0<\psi<q$, ограниченная прямыми $A'B'C'D'$ и $E'F'$, причем точка B', в которой $\varphi=-a$, $\psi=0$, соответствует точке B дна, а точка C' с координатами $\varphi=+a$, $\psi=0$ соответствует точке C. Очевидно, что величина a имеет порядок $c\varepsilon$.

Из интеграла Бернулли следует, что на свободной поверхности EF имеет место равенство

$$gy+\frac{1}{2}\left|\frac{dw}{dz}\right|^2=gh+\frac{1}{2}c^2.$$

Отсюда, пренебрегая малыми величинами второго порядка $\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^2$, получим, что при $\psi=q$ должно иметь место равенство

$$g(y-h)=c^3\,Re\left(\frac{dz}{dw}-\frac{1}{c}\right). \tag{1}$$

Вводя обозначения

$$\frac{g}{c^3}=\nu,\quad \frac{dz}{dw}=\frac{1}{c}\sqrt{\frac{w+a}{w-a}}\,\{1+a\,\Omega\}, \tag{2}$$

легко найдем, что функция $\Omega(w)$ должна быть голоморфна в полосе $0<\psi<q$, должна удовлетворять условию $Im\,\Omega=0$ при $\psi=0$ и условию

$$Re\left\{\sqrt{\frac{w+a}{w-a}}\left[a\frac{d\Omega}{dw}-\frac{a^2\Omega}{w^2-a^2}-\frac{a}{w^2-a^2}+i\nu(1+a\Omega)\right]\right\}=0$$

при $\psi=q$.

Отбрасывая опять малые второго порядка, получим условие

$$Re\left\{\frac{d\Omega}{dw}+i\nu\Omega+\frac{i\nu}{w}-\frac{1}{w^2}\right\}=0 \qquad (3)$$

при $\psi=q$.

Чтобы удовлетворить условию $Im\,\Omega=0$ при $\psi=0$, положим

$$\Omega(w)=\int_0^\infty\left(A(\lambda)e^{i\lambda w}+\overline{A(\lambda)}e^{-i\lambda w}\right)d\lambda+A_0,$$

где A_0—вещественная постоянная, $A(\lambda)$—неизвестная пока функция, $\overline{A(\lambda)}$—комплексно сопряженное с ней количество. Так как при $\psi>0$

$$\frac{1}{w}=-i\int_0^\infty e^{i\lambda w}\,d\lambda \qquad (4)$$

и при $\psi=q$

$$Re\int_0^\infty B(\lambda)e^{-i\lambda w}\,d\lambda=Re\int_0^\infty\overline{B(\lambda)}\,e^{2\lambda q}e^{i\lambda w}\,d\lambda,$$

то легко из (3) получить, что необходимо принять

$$A(\lambda)=\frac{i(\lambda+\nu)\,e^{-\lambda q}}{2\,\Theta(\lambda)},$$

где

$$\Theta(\lambda)=\lambda\operatorname{ch}\lambda q-\nu\operatorname{sh}\lambda q. \qquad (5)$$

Итак,

$$\Omega(w)=-\int_0^\infty\frac{(\lambda+\nu)\,e^{-\lambda q}\sin\lambda w}{\Theta(\lambda)}\,d\lambda+A_0.$$

Если $\nu q>1$, то уравнение $\Theta(\lambda)=0$ имеет положительный корень λ_0; в этом случае под интегралом надо понимать его главное значение; кроме того в этом случае в выражение для $\Omega(w)$ войдут добавочные члены, определяющие свободные волны

$$\Omega(w)=-\text{v. p.}\int_0^\infty\frac{(\lambda+\nu)\,e^{-\lambda q}\sin\lambda w}{\Theta(\lambda)}\,d\lambda+A_0+Ce^{i\lambda_0 w}+\overline{C}e^{-i\lambda_0 w}, \qquad (6)$$

где C—произвольная комплексная постоянная. Эту постоянную, так же как постоянную A_0, мы определим из условия обращения скорости в заданную величину при $x\to-\infty$. Это условие дает нам

$$\lim_{\varphi\to-\infty}\Omega(w)=0.$$

Но можно установить, что

$$\lim_{\varphi\to\pm\infty}\left\{\text{v.p.}\int_0^\infty\frac{(\nu+\lambda)\,e^{-\lambda q}\sin\lambda w}{\Theta(\lambda)}\,d\lambda\mp\frac{\pi}{2}\left[\frac{(\nu-\lambda_0)\,e^{\lambda_0 q}}{\Theta'(\lambda_0)}e^{i\lambda_0 w}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(\nu+\lambda_0)\,e^{-\lambda_0 q}}{\Theta'(\lambda_0)}e^{-i\lambda_0 w}+\frac{\nu}{1-\nu q}\right]\right\}=0,$$

поэтому необходимо принять

$$A_0=-\frac{\pi\nu}{2(1-\nu q)},\quad C=-\frac{\pi}{2}\,\frac{(\nu+\lambda_0)\,e^{-\lambda_0 q}}{\Theta'(\lambda_0)}. \qquad (7)$$

Постоянная q имеет очевидно следующее значение

$$q = c\,(h - \varepsilon). \tag{8}$$

Определив Ω, мы найдем z, интегрируя равенство (2) и замечая, что при $w = a$, $z = -i\varepsilon$:

$$z = -i\varepsilon + \int_a^w \frac{1}{c}\sqrt{\frac{w+a}{w-a}}\,\{1 + a\,\Omega(w)\}\,dw. \tag{9}$$

Отсюда, полагая $w = -a$, $z = i\varepsilon$, находим в первом приближении a:

$$a = \frac{2c\varepsilon}{\pi}. \tag{10}$$

Остановимся еще на определении вида свободной поверхности. Формула (1) позволяет написать

$$y = h + \frac{a}{\nu c}\,Re\left\{\frac{1}{\varphi + iq} + \Omega(\varphi + iq)\right\}.$$

Воспользовавшись предыдущими формулами, получим:

$$y = h + \frac{a}{\nu c}\left\{A_0 + 2\,C\,\mathrm{ch}\,(\lambda_0 q)\cos\lambda_0\varphi - \mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\nu\,e^{i\lambda\varphi}}{2\,i\,\Theta(\lambda)}\,d\lambda\right\}. \tag{11}$$

Обозначим комплексные корни уравнения $\Theta(\lambda)$ через $\pm i\mu_k$, где $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$, тогда предыдущее выражение можно записать так:

$$\left.\begin{aligned} y &= h + 2\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\mu_k\varphi}}{\Theta'(i\mu_k)} \quad \text{при } \varphi < 0,\\ y &= h - 2\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\mu_k\varphi}}{\Theta'(i\mu_k)} - \frac{2\varepsilon}{1-\nu q} - \frac{4\varepsilon}{\Theta'(\lambda_0)}\cos\lambda_0\varphi \quad \text{при } \varphi > 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Если $\nu q < 1$, т. е. $gh < c^2$, уравнение $\Theta(\lambda) = 0$ не имеет вещественных корней, отличных от нулевого, и следовательно последний член в выражении для y при $\varphi > 0$ отсутствует. В этом случае волн не образуется и профиль свободной поверхности понижается на величину $\frac{2\varepsilon}{1-\nu q}$, большую, чем величина уступа дна.

Если же $\nu q > 1$, т. е. $gh > c^2$, то образуются волны, амплитуда которых равна $\frac{4\varepsilon}{\Theta'(\lambda_0)}$.

Общий уровень воды при этом повышается. Вин [1] разбирая эту же самую задачу, получил для амплитуды образующихся волн неверное значение, а именно в два раза меньшее.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
11 IV 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Wien, Lehrbuch d. Hydrodynamik, 201—207 (1900).