Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 9

МЕХАНИКА

Л. Г. МАГНАРАДЗЕ

К РЕШЕНИЮ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КОНТУРОВ С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 25 III 1938)

В предыдущей заметке (1) мы установили, что к интегральным уравнениям Н. И. Мусхелишвили (2) для основных задач плоской теории упругости применим метод J. Radon'а, если только скачок θ введенного там угла $\vartheta(s)$ не превосходит вдоль контура величины $\pi - |m|$, где $m=1$ (в случае первой основной задачи), $m = -\frac{1}{\varkappa}$ (в случае второй основной задачи).

В настоящей заметке, уточняя оценки, мы доказываем, что упомянутые уравнения разрешимы для всех контуров с ограниченным вращением без точек возврата, т. е. когда $\theta < \pi$.

Для этого напомним сперва некоторые обозначения и определения, введенные нами в указанной заметке.

Рассмотрим следующий интеграл Стильтьеса:

$$W_P = \frac{1}{\pi}\int_C \varphi(\sigma)\, df(\omega_P), \quad f(\omega_P) = \omega_P + \frac{m}{2}\sin 2\omega_P,$$

где ω_P — угол между вектором $\overrightarrow{OP}$ и осью Ox. Когда точка P стремится к точке $M(s)$ контура C изнутри, соответственно извне, W_P стремится к внутренним, соответственно к внешним, предельным значениям:

$$W_s^{\pm} = \frac{1}{\pi}\int_C \varphi(\sigma)\, d_\sigma f(F) \pm \varphi(s), \quad F = \lim_{P\to M} \omega_P.$$

Выражение $(T\varphi)_s = \frac{1}{\pi}\int_C \varphi(\sigma)\, d_\sigma f(F)$ как линейное функциональное преобразование в области функций φ допускает следующее представление (1):

$$(T\varphi)_s = \frac{1}{\pi}\int_C \varphi(\sigma)\, d\Psi_s,$$

где $\int_C$ — интеграл в смысле Radon'а и

$$\Psi_s(J_{s_1 s_2}) = f(F(s, s_2-)) - f(F(s, s_1-)), \quad J_{s_1 s_2} = E(s_1 \leqslant \sigma < s_2).$$

Выделим из контура C ту часть $C_{s\varepsilon}(s-\varepsilon\leqslant\sigma\leqslant s+\varepsilon)$, в которой находится угловая точка s с наибольшим скачком

$$\theta=|F(s,s+)-F(s,s-)|\leqslant\pi;$$

тогда

$$(T\varphi)_s=(V\varphi)_s+(T_1\varphi)_s,$$

где оператор V вполне непрерывен и

$$(T_1\varphi)_s=\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_{s\varepsilon}}\varphi(\sigma)\,d\Psi_s.$$

Для T_1 легко установить следующую оценку:

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_{s\varepsilon}}\varphi(\sigma)\,d\Psi_s\pm\varphi(s)\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_{s\varepsilon}}|d\vartheta|+1+\frac{mh}{\pi},\quad\text{при }|\varphi|\leqslant 1,\tag{1}$$

где

$$h=\pm\lim_{P\to M(s)}\int\limits_{C_{s\varepsilon}}\cos 2\omega_P\,|d\omega_P|$$

и $\int\limits_{C_{s\varepsilon}}|d\vartheta|$ — полная вариация вдоль дуги $C_{s\varepsilon}$ функции $\vartheta(s)$, определенной почти всюду равенствами:

$$\cos\vartheta(s)=x'(s),\quad \sin\vartheta(s)=y'(s).$$

Теперь рассмотрим функцию от множества $\Pi_s(E)$, определенную следующим образом:

$$\Pi_\sigma(E)=1,\ \text{если } P\subset E,$$
$$\Pi_\sigma(E)=0,\ \text{если } \sigma\neq s,$$

и перепишем неравенство (1) следующим образом:

$$\int\limits_{C_{s\varepsilon}}\left|d\left(\frac{\Psi_s}{\pi}\pm\Pi_s\right)\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_{s\varepsilon}}|d\vartheta|+1+\frac{mh}{\pi},\quad\text{при }|\varphi|\leqslant 1.$$

Введя еще абсолютно аддитивную функцию от множеств

$$\Psi_s^*(E)=\Psi_s(E)-\Pi_s(E)\cdot\Psi_s(\{P(s)\}),$$

мы будем иметь:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_{s\varepsilon}}|d\Psi_s|\leqslant\frac{\Psi_s(\{P(s)\})}{\pi}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_{s\varepsilon}}|d\Psi_s^*|$$

и

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_{s\varepsilon}}|d\Psi_s^*|=\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_{s\varepsilon}-\{P(s)\}}|d\Psi_s|=\int\limits_{C_{s\varepsilon}-\{P(s)\}}\left|d\left(\frac{\Psi_s}{\pi}\pm\Pi_s\right)\right|.$$

Поэтому при $|\varphi|\leqslant 1$ получим:

$$|(T_1\varphi)_s|\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_{s\varepsilon}}|d\Psi_s|\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_{s\varepsilon}}|d\vartheta|+1+\frac{mh}{\pi}+\frac{|\Psi_s|}{\pi}-\left|1\pm\frac{\Psi_s}{\pi}\right|.$$

Теперь выберем координатную систему так, чтобы в рассматриваемой точке $F(s, s-)=0$. Тогда

$$\frac{|\Psi_s|}{\pi}=\frac{1}{\pi}\left|F(s, s+) \pm \frac{m}{2} \sin 2F(s, s+)\right| \leqslant 1$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h=\pm\frac{\sin 2\theta}{2};$$

отсюда следует, если выбирать знаки подходящим образом и принять во внимание неравенство J. Radon'a:

$$\frac{1}{\pi}\int_{C_{s\varepsilon}}|d\vartheta|<\frac{\theta+\eta}{\pi}, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\eta(\varepsilon)=0,$$

что

$$|(T_1\varphi)_s| \leqslant \frac{1}{\pi}\left(\theta \pm \frac{m}{2}\sin 2\theta+\eta\right).$$

Вследствие этого ряд

$$T_1+\lambda T_1^2+\lambda^2 T_1^3+\cdots$$

сходится во всяком случае для $|\lambda|<\dfrac{\pi}{\theta \pm \frac{m}{2}\sin 2\theta+\eta}$.

Следовательно радиус Фредгольма для оператора $T=V+T_1$ не меньше числа

$$\frac{\pi}{\theta \pm \frac{m}{2}\sin 2\theta}\,^*.$$

Так как $\theta \pm \frac{m}{2}\sin 2\theta<\pi$, когда $\theta<\pi$, то к функциональному уравнению Н. И. Мусхелишвили

$$\varphi-T\varphi=f$$

или эквивалентному ему уравнению

$$\overline{\varphi(t_0)}-\frac{1}{\pi}\int_C\left[\overline{\varphi(t)}+me^{-2iF}\varphi(t)\right]dF=C(t_0)$$

применим метод J. Radon'a для $m=1$ и $m=-\frac{1}{\varkappa}$.

Остается показать, что упомянутое уравнение всегда имеет непрерывное решение для указанных значений m. Для $m=-\frac{1}{\varkappa}$ это было нами установлено в предыдущей заметке ([1]). При $m=1$, следуя приему, указанному Д. И. Шерманом ([3]) для случая регулярной границы, прибавим к левой части нашего уравнения функционал:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(t)}{t}dt+\frac{1}{t_0}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(t)}{t^2}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\overline{\varphi(t)}}{\bar t^2}d\bar t\right\}.$$

Тогда легко показать, почти буквально повторяя рассуждения Д. И. Шермана ([3]), что соответствующее однородное уравнение имеет только нулевое решение. С другой стороны, прибавление этого функ-

* Отсюда следует, что при $\theta=0$ радиус Фредгольма для T равен бесконечности, т. е. оператор T вполне непрерывен.

ционала не изменяет радиуса Фредгольма исходного уравнения, так как прибавляемый функционал, как легко видеть, вполне непрерывен.

Таким образом мы приходим к следующему заключению: система интегральных уравнений Н. И. Мусхелишвили для основных граничных задач плоской теории упругости имеет непрерывное регулярное решение для всякой границы C с ограниченным вращением $\left(\text{т. е. } \int\limits_C |d\vartheta| < \infty\right)$, без точек возврата ($\theta < \pi$).

Тбилисский математический институт.
Грузинский филиал Академии Наук СССР.

Поступило
27 III 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Г. Магнарадзе, ДАН, XVI, 3 (1937). [2] Н. И. Мусхелишвили, ДАН, III, 7 (1934). [3] Д. И. Шерман, ДАН, IV, 3, 119 (1935).