Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 9

МАТЕМАТИКА

Б. И. СЕГАЛ

НОВЫЙ ТИП ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 21 IV 1938)

Пусть $a+bi$ — данное комплексное число, причем $a>1$, $b\neq 0$. Рассмотрим вопрос о приближении комплексных чисел $N_1+N_2 i$ суммой вида

$$\sum_{\lambda=1}^{r} x_\lambda^{a+bi}, \tag{1}$$

где $x_1, \ldots, x_r$ суть целые числа. Другими словами, мы рассматриваем одновременное приближение действительной части суммы (1) к N_1 и мнимой части той же суммы к N_2.

Решение этой проблемы основывается на оценке тригонометрических сумм вида

$$\sum_{A\leqslant x\leqslant B} \exp(2\pi i f(x)), \tag{2}$$

где $f(x)$ — действительная функция, удовлетворяющая определенным условиям. Для нашей цели мы пользуемся следующей леммой, относящейся к оценке таких сумм.

Лемма. *Пусть k — целое число $\geqslant 3$; $U=B-A>0$; p — постоянное >1. Пусть, далее, $f(x)$ — действительная функция, имеющая в интервале $A\leqslant x\leqslant B$ k производных $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(k)}(x)$. Если $f^{(k)}(x)$ в указанном интервале $A\leqslant x\leqslant B$ знакопостоянна и*

$$V^{-1}\leqslant |f^{(k)}(x)|\leqslant pV^{-1},$$

где V положительно и не зависит от x, то мы можем выбрать $\rho_k>0$, зависящее только от k так, что

$$\left|\sum_{A\leqslant x\leqslant B} \exp(2\pi i f(x))\right| < cV^{-\rho_k}(U+V^{\frac{1}{2}}),$$

где c — положительная постоянная.

Существующая теория тригонометрических сумм (2) дает нам возможность действительно выбрать ρ_k, удовлетворяющее условиям этой леммы. Так, пользуясь хорошо известной теоремой van der Corput'a (1), мы можем положить

$$\rho_k=2^{-k}, \tag{3}$$

и применением нового метода И. М. Виноградова для оценки вейлевских сумм (2) van der Corput заменил свою теорему более точной, которая дает нам возможность положить даже

$$\rho_k = (4k^3 \log k)^{-1} \tag{4}$$

для $k \geqslant 16$. Имея однако в виду возможные в дальнейшем улучшения оценки сумм (2), мы применяем формулированную выше лемму без выбора определенного значения для ρ_k.

Главный результат, полученный нами при решении проблемы, упомянутой в начале настоящей заметки, может быть формулирован следующим образом.

Теорема. *Пусть $a+bi$ — данное комплексное число, причем $a>1$ и $b \neq 0$; $n=[a]+2$; r — целое число $\geqslant r_0$, где*

$$r_0 = \left[\frac{3a}{\rho_n}\right] + d, \quad d = \begin{cases} 8, & \text{если } a < 2, \\ 1, & \text{если } a \geqslant 2, \end{cases}$$

а ρ_n удовлетворяет условиям леммы и кроме того $\rho_n \leqslant \frac{1}{6}$ для $n \geqslant 3$. Пусть, далее, $N = N_1 + N_2 i$ — любое комплексное число, модуль которого превосходит некоторое постоянное c_0; $X = |N|^{\frac{1}{a}}$; $\Delta_1 = X^{-\frac{a}{r_0}}$; I_N означает число представлений N в форме

$$N_1 + N_2 i = h_1 + h_2 i + \sum_{\lambda=1}^{r} x_\lambda^{a+bi}, \tag{5}$$

где целые x_λ удовлетворяют условиям

$$0 < x_\lambda < X$$

и h_1, h_2 удовлетворяют условиям

$$-\Delta_1 \leqslant h_1 \leqslant \Delta_1, \quad -\Delta_1 \leqslant h_2 \leqslant \Delta_1.$$

Тогда мы имеем асимптотическую формулу

$$I_N = L X^{r-2a-\frac{2a}{r_0}} (1 + O(X^{-\gamma})),$$

где L превосходит положительное число, зависящее только от a, b, r; $\gamma = (2r_0)^{-1}$, если $a < 2$, или $\gamma = (ar_0)^{-1}$, если $a \geqslant 2$.

Если мы воспользуемся значениями ρ_k (3) и (4), то для r_0 мы получим следующие значения:

$$\begin{aligned} r_0 &= [24a] + 8, && \text{если } 1 < a < 2, \\ r_0 &= [3a \cdot 2^n] + 1, && \text{если } 2 \leqslant a < 14, \\ r_0 &= [12an^3 \log n] + 1, && \text{если } \quad a \geqslant 14. \end{aligned}$$

Таким образом каждое комплексное число $N_1 + N_2 i$ может быть аппроксимировано суммой (1), если $r \geqslant r_0 = r_0(a)$; при этом погрешность стремится к нулю по мере неограниченного возрастания модуля числа $N_1 + N_2 i$.

Изложим вкратце основные пункты доказательства. Строим функцию $\varphi(y_1, y_2)$ двух действительных переменных y_1 и y_2, принимающую значения

$$\begin{aligned} \varphi(y_1, y_2) &= 1, \text{ если } |y_1| \leqslant \Delta - s\delta, \ |y_2| \leqslant \Delta - s\delta, \\ 0 \leqslant \varphi(y_1, y_2) &\leqslant 1, \text{ если } \Delta - s\delta \leqslant |y_1| \leqslant \Delta + s\delta, \quad |y_2| \leqslant \Delta + s\delta, \\ &\text{или } \Delta - s\delta \leqslant |y_2| \leqslant \Delta + s\delta, \quad |y_1| \leqslant \Delta + s\delta; \\ \varphi(y_1, y_2) &= 0, \text{ если } |y_1| \geqslant \Delta + s\delta, \ |y_2| \geqslant \Delta + s\delta, \end{aligned}$$

где $\Delta=\Delta_1+s\delta$, $\delta=o(\Delta)$, s — целое число, зависящее только от a, b, r. С помощью этой функции мы находим

$$I_N+R=E\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty TS^r\exp(-2\pi iz_1N_1)\exp(-2\pi iz_2N_2)\,dz_1\,dz_2, \tag{6}$$

где

$$E=2^{-2s+2}\pi^{-2s-2},\quad T=\frac{\sin(2\pi\Delta z_1)\sin(2\pi\Delta z_2)\sin^s(2\pi\delta z_1)\sin^s(2\pi\delta z_2)}{\delta^{2s}z_1^{s+1}z_2^{s+1}},$$

$$S=\sum_{1\leqslant x\leqslant X}\exp(2\pi ix^a(z_1\cos(b\log x)+z_2\sin(b\log x))),$$

а R соответствует представлениям числа N в форме (5), когда h_1 и h_2 удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}\Delta-s\delta\leqslant|h_1|\leqslant\Delta+s\delta,\qquad |h_2|\leqslant\Delta+s\delta,\\ \Delta-s\delta\leqslant|h_2|\leqslant\Delta+s\delta,\qquad |h_1|\leqslant\Delta+s\delta.\end{aligned}$$

Применяя лемму, формулированную выше, а также некоторые другие хорошо известные леммы, мы находим, что порядок разности правой части (6) и

$$H_N=E\int\limits_0^{X^{-a+\varepsilon_1}}\int\limits_0^{X^{-a+\varepsilon_1}}TS^r\exp(-2\pi iz_1N_1)\exp(-2\pi iz_2N_2)\,dz_1\,dz_2,$$

при определенном значении $\varepsilon_1>0$ не превосходит

$$X^{r-2a-\frac{2a}{r_0}-\gamma}.$$

Так как функция и ее производные в показателе отдельных членов S знакопеременны в интервале $1\leqslant x\leqslant X$, то мы применяем специальное деление суммы S на частичные суммы. Аналогичную оценку мы находим для R и следовательно

$$I_N-H_N=O(X^{r-2a-\frac{2a}{r_0}-\gamma}). \tag{7}$$

Для вычисления H_N мы вводим систему комплексных чисел $M=M_1+M_2i$, определяемых следующим образом

$$M_1=N_1\pm2\mu\Delta_1,\quad M_2=N_2\pm2\nu\Delta_1\ (\mu,\nu=0,1,2,\ldots),$$
$$N_1-X^{a-\eta}\leqslant M_1\leqslant N_1+X^{a-\eta},$$
$$N_2-\sqrt{X^{2a-2\eta}-(N_1-M_1)^2}\leqslant M_2\leqslant N_2+\sqrt{X^{2a-2\eta}-(N_1-M_1)^2},$$

где η — некоторое положительное число $<\frac{1}{2}$. Мы доказываем, что для каждого такого числа имеем

$$I_M-H_N=O(X^{r-2a-\frac{2a}{r_0}-\gamma}).$$

Для числа чисел M мы имеем

$$Q=\frac{\pi X^{2a-2\eta}}{4\Delta_1^2}+O\left(\frac{X^{a-\eta}}{\Delta_1^2}\right)$$

и суммированием предыдущего равенства находим

$$\sum_M I_M-QH_N=O(QX^{r-2a-\frac{2a}{r_0}-\gamma}). \tag{8}$$

Но $\sum_M I_M$ есть число целых точек в области (A):

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{r} x_\lambda^{a+bi}-(N_1+N_2 i)\right| \leqslant X^{a-\eta}+c_1\Delta_1, \quad -2\sqrt{2}<c_1<2\sqrt{2},$$
$$0<x_\lambda<X.$$

Поэтому мы имеем

$$\sum_M I_M=\int\underset{(A)}{\cdots}\int dx_1\ldots dx_r+O(X^{r-1}\log^r X).$$

Далее полагаем

$$\frac{N_1+N_2 i}{X^{a+bi}}=e^{\psi i}$$

и определяем число l, зависящее от N, a, b, r, с помощью следующего равенства

$$\psi+2b\log l-\frac{b}{a}\log r=\frac{\pi}{2}+2k\pi.$$

Мы всегда очевидно можем выбрать l в промежутке

$$1\leqslant l\leqslant e^{\frac{\pi}{|b|}}.$$

После некоторых преобразований мы получаем

$$\sum_M I_M=\left(\frac{X}{l}\right)^r\int\cdots\int dt_1\ldots dt_r+O(X^{r-1}\log^r X),$$

где кратный интеграл берется по области

$$l^a(1-\chi)\leqslant\sum_{\lambda=1}^{r} t_\lambda^a\sin(\psi+b\log(lt_\lambda))\leqslant l^a(1+\chi),$$
$$-l^a\chi\leqslant\sum_{\lambda=1}^{r} t_\lambda^a\cos(\psi+b\log(lt_\lambda))\leqslant l^a\chi,$$
$$0<t_\lambda<l,$$

причем

$$\chi=m(X^{-\eta}+c_1\Delta_1 X^{-a}), \quad \frac{\sqrt{2}}{2}<m<1.$$

Отсюда находим без труда

$$\sum_M I_M=Dm^2 l^{2a-r}X^{r-2\eta}+O(X^{r-1}\log^r X), \tag{9}$$

где D превосходит некоторое положительное число, зависящее только от a, b и r. Из (7), (8) и (9) мы получаем

$$I_N-L\Delta_1^2 X^{r-2a}=O(X^{r-2a-\frac{2a}{r_0}-\gamma}),$$

где

$$L=\frac{4}{\pi}Dm^2 l^{2a-r}.$$

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
26 IV 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] I. G. van der Corput, Math. ZS, 29, 401, Satz 4 (1929). [2] И. М. Виноградов, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, X (1937),

Но $\sum\limits_M I_M$ есть число целых точек в области (A):

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{r} x_\lambda^{a+bi} - (N_1 + N_2 i)\right| \leqslant X^{a-\eta} + c_1\Delta_1, \quad -2\sqrt{2} < c_1 < 2\sqrt{2},$$

$$0 < x_\lambda < X.$$

Поэтому мы имеем

$$\sum_M I_M = \int \ldots \int_{(A)} dx_1 \ldots dx_r + O(X^{r-1}\log^r X).$$

Далее полагаем

$$\frac{N_1 + N_2 i}{X^{a+bi}} = e^{\psi i}$$

и определяем число l, зависящее от N, a, b, r, с помощью следующего равенства

$$\psi + 2b\log l - \frac{b}{a}\log r = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Мы всегда очевидно можем выбрать l в промежутке

$$1 \leqslant l \leqslant e^{\frac{\pi}{|b|}}.$$

После некоторых преобразований мы получаем

$$\sum_M I_M = \left(\frac{X}{l}\right)^r \int \ldots \int dt_1 \ldots dt_r + O(X^{r-1}\log^r X),$$

где кратный интеграл берется по области

$$l^a(1-\chi) \leqslant \sum_{\lambda=1}^{r} t_\lambda^a \sin(\psi + b\log(lt_\lambda)) \leqslant l^a(1+\chi),$$

$$-l^a\chi \leqslant \sum_{\lambda=1}^{r} t_\lambda^a \cos(\psi + b\log(lt_\lambda)) \leqslant l^a\chi,$$

$$0 < t_\lambda < l,$$

причем

$$\chi = m(X^{-\eta} + c_1\Delta_1 X^{-a}), \quad \frac{\sqrt{2}}{2} < m < 1.$$

Отсюда находим без труда

$$\sum_M I_M = Dm^2 l^{2a-r} X^{r-2\eta} + O(X^{r-1}\log^r X), \tag{9}$$

где D превосходит некоторое положительное число, зависящее только от a, b и r. Из (7), (8) и (9) мы получаем

$$I_N - L\Delta_1^2 X^{r-2a} = O\left(X^{r-2a-\frac{2a}{r_0}-\gamma}\right),$$

где

$$L = \frac{4}{\pi} Dm^2 l^{2a-r}.$$

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
26 IV 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] I. G. van der Corput, Math. ZS, 29, 401, Satz 4 (1929). [2] И. М. Виноградов, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, X (1937),