Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 9

МАТЕМАТИКА

И. И. ПРИВАЛОВ

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 7 IV 1938)

В нашей статье ([1]) «Приложения понятия гармонической меры к некоторым проблемам теории функций» доказаны следующие две теоремы:

I. Если $w=f(z)$ есть мероморфная функция в единичном круге, отличная от константы, принимающая по всем некасательным путям определенные предельные значения (конечные или бесконечность) на множестве точек E_z окружности $|z|=1$, $\operatorname{mes} E_z > 0$, то множество E_w ее предельных значений содержит замкнутое множество положительной гармонической меры.

II. Если $w=f(z)$ есть мероморфная функция в единичном круге, отличная от константы, принимающая по радиальным путям определенные предельные значения (конечные или бесконечность) на множестве точек E_z, расположенном на дуге σ окружности $|z|=1$, меры большей нуля всюду на σ и второй категории, то множество E_w ее предельных значений содержит замкнутое множество положительной гармонической меры.

Доказательство теоремы II основано на теореме I, а доказательство теоремы I может быть приведено к рассмотрению следующего ее частного случая *.

III. Если $w=w(z)$ есть голоморфная и ограниченная функция в единичном круге, отличная от константы, стремящаяся по радиусам равномерно на совершенном множестве точек E_z окружности $|z|=1$, $\operatorname{mes} E_z > 0$, к некоторым граничным значениям E_w, то множество E_w есть положительной гармонической меры.

В настоящей статье мы докажем теорему IV, более точную по сравнению с предложением III. С этой целью, считая E_w замкнутым множеством, расположенным внутри круга $|w|<M_1$, обозначим через D открытое множество, являющееся дополнительным к E_w относительно круга $|w|<M_1$. Окружим точки множества E_w конечным числом аналитических контуров Γ_w, попарно не пересекающихся, и обозначим через D_w открытое множество, граница которого состоит из этих контуров Γ_w и окружности $|w|=M_1$.

---

* Результат III содержится в теореме, доказанной R. Nevanlinna ([2]).

Пусть $\omega(\Gamma_w, D_w, w)$ есть гармоническая мера системы контуров Γ_w относительно D_w в точке w, т. е. гармоническая функция в D_w, непрерывная в $\bar{D}_w$, равная единице на контурах Γ_w и равная нулю на окружности $|w|=M_1$. Нижнюю границу относительно всех контуров Γ_w гармонической меры $\omega(\Gamma_w, D_w, w)$ обозначим через $\omega(E_w, D, w)$ и будем называть гармонической мерой множества E_w относительно D в точке $w \subset D$.

IV. Если $w=w(z)$ есть голоморфная функция в единичном круге K, $|w(z)|<M$, отличная от константы, стремящаяся по радиусам равномерно на совершенном множестве точек E_z окружности $|z|=1$

$$\operatorname{mes} E_z > 0$$

к некоторым граничным значениям E_w, то

$$\omega(E_w, D, w_0) \geqslant \omega(E_z, K, z_0), \tag{I}$$

где $D=C(E_w)$ относительно круга $|w|<M_1$, $M_1>M$, z_0 — любая точка круга K, для которой значение $w_0=w(z_0)$ лежит вне E_w.

Доказательство. Линейным преобразованием единичного круга $|z|<1$ самого в себя переведем точку z_0 в нуль; при этом множество точек E_z перейдет в множество точек E'_z, меру которого обозначим $2\pi\mu>0$. Очевидно будем иметь:

$$\omega(E_z, K, z_0)=\omega(E'_z, K, 0)=\mu,$$

и доказываемое неравенство (I) заменится следующим:

$$\omega(E_w, D, w_0) \geqslant \mu, \tag{I'}$$

где $w_0=w(0)$ изображает точку, лежащую вне E_w. Кривые Γ_w мы можем выбрать так, чтобы точка w_0 лежала внутри D_w.

Рассмотрим совокупность тех точек z единичного круга, в которых значения функции $w(z)$ падают на D_w; это множество точек содержит как часть область D_z, заключающую внутри себя нулевую точку и ограниченную с одной стороны прообразами Γ_z кривых Γ_w, с другой стороны некоторыми точками окружности $|z|=1$. Кривые Γ_z аналитические и сгущаются, если они в бесконечном числе, к границе $|z|=1$.

Положим

$$\omega(\Gamma_w, D_w, w)=\omega(w).$$

Очевидно функция $\omega[w(z)]=u(z)$ будет гармонической в D_z, равной единице во всех точках z, $|z|<1$, лежащих на граничных кривых Γ_z, $u(0)=\omega(w_0)$. Мы приложим теперь формулу Грина:

$$\int\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds=0$$

к той области, которая определяется как пересечение D'_z области D_z с кругом $|z|<r<1$, полагая $u=\omega[w(z)]$, $v=\ln\frac{r}{|z|}$, и изолируя сперва $z=0$ посредством маленького круга. Заставляя затем радиус этого круга стремиться к нулю, мы получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma'_z}\frac{\partial\ln\frac{r}{|z|}}{\partial n}ds-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma'_z}\ln\frac{r}{|z|}\frac{\partial\omega}{\partial n}ds+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\varphi)_r}\omega[w(re^{i\varphi})]d\varphi-\omega(w_0)=0, \tag{1}$$

так как v исчезает на $|z|=r$, а $u=1$ на дугах Γ'_z; здесь $(\varphi)_r$ обозначают дуги окружности $|z|=r$ и Γ'_z — частичные дуги определенных выше дуг Γ_z, которые (в конечном числе) ограничивают область D'_z.

Легко подсчитать первый интеграл формулы (1); он будет равен $1 - m_r$, где положено: $m_r = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(\varphi)_r} d\varphi$. Второй интеграл формулы (1) не больше нуля, потому что на Γ'_z

$$\ln \frac{r}{|z|} > 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial n} \leqslant 0,$$

а третий интеграл не меньше нуля. Заметив это, из формулы (1) получим:

$$\omega(w_0) \geqslant 1 - m_r. \tag{2}$$

Выберем r столь большим, чтобы точки $w(re^{i\varphi})$ лежали вне D_w, если значения φ соответствуют множеству E'_z, что возможно в силу предположения о равномерном стремлении $w(re^{i\varphi})$ к значениям E_w на множестве E'_z. Так как, с другой стороны, точка $w(re^{i\varphi})$ для каждого φ из множества $(\varphi)_r$ попадает на D_w, то точки $re^{i\varphi}$, соответствующие этим двум множествам значений φ, образуют два непересекающихся множества; поэтому будет:

$$m_r = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(\varphi)_r} d\varphi \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{E''_z} d\varphi = 1 - \mu.$$

Итак, из неравенства (2) будет следовать:

$$\omega(w_0) \geqslant \mu.$$

Это неравенство справедливо для всякой системы контуров Γ_w, а поэтому

$$\omega(E_w, D, w_0) = \inf \omega(w_0) \geqslant \mu,$$

что и требовалось доказать.

Поступило
8 IV 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Матем. сб. (1938); ДАН, XVIII, № 1 (1938). [2] R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen, 198 (1936).